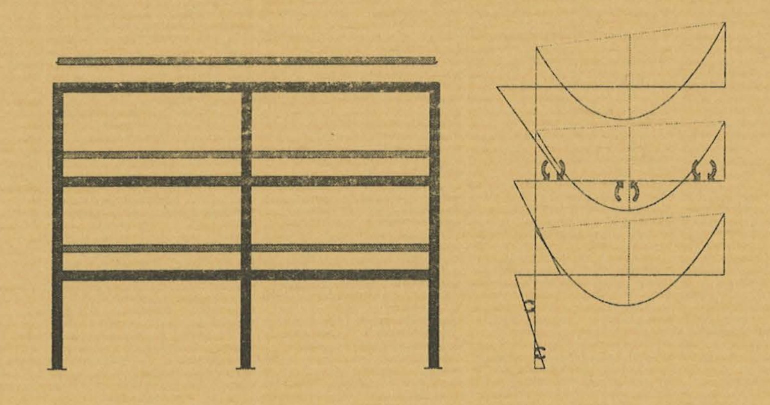
ANÁLISIS LINEAL DE PÓRTICOS DE EDIFICACIÓN (I)

por

JOSÉ IGNACIO HERNANDO GARCÍA

JESÚS ORTIZ HERRERA



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

ANÁLISIS LINEAL DE PÓRTICOS DE EDIFICACIÓN (I)

por

JOSÉ IGNACIO HERNANDO GARCÍA
JESÚS ORTIZ HERRERA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Análisis lineal de pórticos de edificación I

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Daniel Álvarez Morcillo.
CUADERNO 86.01
ISBN: 84-95365-58-8 (obra completa)
ISBN: 84-95365-59-6 (Análisis lineal de pórticos de edificación I)
Depósito Legal: M-43858-2000

Índice General

Capítulo 1

ANÁLISIS LINEAL DE ESTRUCTURAS

Estas lecciones sobre análisis lineal de pórticos constituyen una parte del curso de ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS del plan de estudios 96 de la ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID. Por extensión, se incluyen tipos estructurales como vigas continuas (que por su sencillez preceden al estudio de los pórticos propiamente dichos) y tipos especiales de pórticos no ortogonales, pórticos atirantados, etc. (cuyo análisis es abordable mediante sencillas generalizaciones de las técnicas básicas aquí expuestas).

El estudio de estas lecciones se circunscribe al análisis de ESTRUCTURAS DE BARRAS o piezas prismáticas. El análisis de placas macizas y nervadas, tan comunes en la edificación actual, podría incluirse en una lección dedicada a la especialización del método principal de análisis usado en estas lecciones, para modelos de emparrillados de barras, pero esta posible lección no está contemplada en esta primera edición. El cálculo dinámico tampoco se estudia. Los métodos simples de análisis no lineal de pórticos (problemas sencillos de segundo orden y cálculo rígido-plástico de primer orden), aun formando parte del programa impartido en la asignatura citada, no se incluyen en el presente volumen, cuyo contenido se refiere por lo tanto sólo a una parte de dicho programa

El análisis de las estructuras ISOSTÁTICAS se supone conocido por el alumno al iniciar estas lecciones, aunque no obstante, dentro de lo razonablemente posible, se tratará de dotarles de carácter auto-contenido. También se presupone una razonable destreza en el análisis tensional y deformativo elemental de las piezas isostáticas, así como un conocimiento, siquiera intuitivo, de las formas incompletas (mecanismos) y críticas, ya que el evitarlas constituye la "primera" regla del diseño estructural.

Las ESTRUCTURAS DE EDIFICACIÓN actuales, por razones tanto económicas como constructivas, han derivado en general hacia el uso predominante de las tipologías HIPERESTÁTICAS, por lo que su comprensión y conocimiento operativo es de la máxima importancia dentro de este área.

Por definición, las ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS son aquéllas en las cuales las ECUACIONES DE EQUILIBRIO son "suficientes" (además de necesarias), para resolver el problema estático: determinación de reacciones y esfuerzos.

Por el contrario en las ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS, también por definición, no es posible el análisis separado del problema estático y del problema cinemático. Es preciso complementar las ECUACIONES DE EQUILIBRIO con otras de carácter diferente, denominadas ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.

El nexo de unión entre ambas son las RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES, que también se denominan ECUACIONES CONSTITUTIVAS (generalizadas), tomando un término de uso común en el moderno análisis, si bien en la mecánica de medios continuos hacen referencia a las relaciones entre tensiones y deformaciones, mientras que para estructuras de barras se maneja el resultado de integrar dichas relaciones en la sección recta de la pieza. A a su vez, las deformaciones se expresan en función de un número finito de parámetros para cada sección (elongación del eje baricéntrico, curvatura, giro unitario de torsión, etc.).

Son casi innumerables los diversos procedimientos publicados de análisis estructural, que se organizan en diversas

Grupo	Clase	Tipo	Notación	Convenio de signos	Algunos signos típicos	Unidades SI
Magnitudes Estaticas	Fuerzas y Momentos	Acciones nodales ("exteriores")	F_x, F_z			kN
			M_y (o M)			kN
		Momentos de extremo de barra	m_1, m_2			kN m
	Solicitaciones	Esfuerzo normal o axil	N			kN
		Esfuerzo cortante	V			kN
		Momento flector	M			kN m
		(Momento torsor)	M_T			kN m
Magnitudes Cinemáticas	Desplazamientos y giros	Movimientos nodales	u,v			m ó mm
			θ			Adimensional (rad)
		Giros relativos de extremo de barra	φ_1, φ_2			Adimensional (rad)
	Deformaciones (generalizadas)	Deformación unitaria del eje baricéntrico	$\epsilon_0 = \frac{\Delta ds}{ds}$			Adimensional
		Deformación de cortante	γ			Adimensional
		Curvatura	$C=\frac{1}{R}=\frac{d\varphi}{ds}$			m^{-1}
		Giro unitario de torsión	$\left(C_T = \frac{d\varphi_s}{ds}\right)$			m^{-1}

Figura 1.1: Notación y signos

familias, según el uso específico de las tres categorías de ecuaciones antedichas. Una primera clasificación fundamental deslinda los modelos de análisis lineal y no lineal. Posteriormente se establecerá otra distinción entre MÉTODOS DE EQUILIBRIO y MÉTODOS DE COMPATIBILIDAD, que puede superponerse o "cruzarse" con la clasificación anterior.

Se define como ANÁLISIS LINEAL de estructuras el conjunto de técnicas de análisis que tienen en común el hecho de traducirse en ECUACIONES LINEALES entre las diversas MAGNITUDES ESTÁTICAS (fuerzas, momentos, esfuerzos interiores, ...) y CINEMÁTICAS (desplazamientos, giros, deformaciones, ...).

Una de las condiciones básicas del ANÁLISIS LINEAL es la HIPÓTESIS DE PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS , en virtud de la cual todas las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad se suponen formulables para la geometría inicial anterior a la deformación. El incumplimiento de esta hipótesis en determinados casos puede producir diversos tipos de fenómenos de inestabilidad.

En caso de ser aplicable el ANÁLISIS LINEAL, como consecuencia del carácter LINEAL de todas las ecuaciones que intervienen en la formulación, rige el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN: es válido analizar por separado los "efectos" de diversas "causas" concomitantes, y sumar (algebraicamente) los resultados obtenidos.

De este principio se hará uso continuo dentro del estudio del análisis lineal de estructuras, al que se dedican estas lecciones. Pero hay que advertir que NO ES APLICABLE CUANDO SE CONSIDERAN PROBLEMAS "NO LINEALES".

En la FIGURA 1.1 se compendian diversos CRITERIOS DE NOTACIÓN y SIGNOS que se irán introduciendo a lo largo de estas lecciones .

De dicho cuadro se llama la atención sobre las magnitudes N, M, ϵ_0 y C, que intervienen en las siguientes RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES a nivel de rebanada elemental (ds) de la pieza, que se asumirán en las estas lecciones:

$N=EA\cdot \epsilon_0$	...	relación esfuerzo axil-elongación
$M=EI\cdot C$	...	relación momento flector-curvatura

Ocasionalmente pueden introducirse también relaciones lineales ($V = GJ\cdot \gamma$; $M_T = GI_T \cdot C_T$) entre otras magnitudes de la FIGURA 1.1

En principio se hace referencia a estados de flexión en un plano de simetría o en un único plano principal de inercia de la pieza, por lo que se considerar una única familia de esfuerzos V y M.

Se recuerda que estas ecuaciones se basan, entre otras, en la hipótesis de Navier (o de "deformación plana") y la ley de Hooke (material elástico-lineal); y que tanto los esfuerzos como las deformaciones deben referirse al eje baricéntrico de la pieza.

El comportamiento real de los materiales de edificación dista mucho, en determinadas fases de solicitación, de ese comportamiento ELÁSTICO-LINEAL, pero la entrada en el dominio anelástico puede complicar mucho los modelos de análisis, ya que dejan de ser lineales. Parece pues natural, por razones didácticas, centrarse en el estudio de los métodos lineales, pero insistiendo en los siguientes aspectos:

1. Todos los MODELOS de análisis estructural son aproximaciones más o menos ajustadas a la realidad experimental y de la construcción. La divergencia entre la hipótesis de partida sobre el comportamiento del material y de su comportamiento real es un buen ejemplo de ello, pero NO EL ÚNICO. Es preciso pues RELATIVIZAR TODOS LOS MODELOS, sin transmitir concepciones dogmáticas o excluyentes.
2. La consideración de MODELOS NO LINEALES SIMPLES, que mejoren la aproximación fuera del dominio lineal, puede hacerse sobre la base de conceptos y resultados del análisis lineal, lecciones), por lo que el estudio del análisis lineal es un referente útil y necesario, sin perjuicio de su obligado perfeccionamiento para una comprensión, más ajustada a la REALIDAD, de muchas estructuras de edificación.
3. Hay que apelar a la experiencia (laboratorio, proyecto, construcción) como fundamentación de "NORMAS DE BUENA PRÁCTICA" fuera de las cuales la seguridad de los modelos de análisis puede no estar contrastada.

La exposición de las lecciones siguientes se precede en el curso al que sirven de apoyo, de la explicación del MÉTODO DE COMPATIBILIDAD (no incluido en el presente texto) ya que por su carácter didáctico permite un primer estudio elemental de estructuras de reducido grado de hiperestatismo. Dicho método es prácticamente inviable para el análisis de los pórticos reales de edificación, altísimamente hiperestáticos, por lo que un curso en el que se incluya el estudio de dichos pórticos necesariamente debe considerar

como técnica fundamental de análisis el método (métodos) de equilibrio o de la rigidez, al que se dedican las presentes lecciones.

Capítulo 2

MÉTODOS DE EQUILIBRIO

Como se indicó en la sección preliminar, en todo análisis hiperestático, deben estar presentes de una u otra forma los aspectos siguientes, cuya diferente utilización en cada etapa del análisis, distingue a unos métodos de otros:

- EQUILIBRIO
- COMPATIBILIDAD
- RELACIONES ESFUERZOS-DEFORMACIONES

Debe también recordarse que el presente texto se circunscribe al ANÁLISIS LINEAL, por lo cual rige el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN. De este modo pueden describirse los distintos estados de una estructura como suma de otros más sencillas.

Puede imaginarse un ensayo de Laboratorio en el cual se midiesen los movimientos de los nudos de una estructura. Podrían analizarse, por separado, dos estados: en uno se impondrían exclusivamente los movimientos medidos en los nudos y en el segundo todos permanecerían fijos pero se aplicarían las cargas de todas las barras. Es patente que la suma de ambos debe reproducir el estado "real" de la estructura.

Los denominados MÉTODOS DE EQUILIBRIO (bajo cuya denominación en realidad se engloba una variada familia de métodos formalmente a veces muy distintos) dentro del análisis lineal de estructuras comparten generalmente las siguientes características:

1. Se consideran dos estados ideales de la estructura. Ninguno de ellos representa la estructura "real", pero su "suma" puede hacerlo. Ambos estados se eligen de modo que su análisis sea inmediato:

    - Un primer ESTADO COACCIONADO, ESTADO DE NUDOS EMPOTRADOS O ESTADO DE NUDOS FIJOS que abreviadamente se denominará por la sigla [f], ESTADO "f", o por el subíndice f.

      En este estado se considerarán todas las acciones que actúan sobre la estructura, siendo su análisis trivial, toda vez que en cualesquiera de los textos citados en la bibliografía se encuentra resuelto y tabulado el de una viga doblemente empotrada, empotrada-apoyada, etc. con diversas condiciones de carga.

      Debe insistirse en la necesidad de conocer estos resultados para utilizar con destreza el MÉTODO DE EQUILIBRIO.

    - Un segundo ESTADO LIBERADO O ESTADO DE NUDOS LIBRES, en el cual se permiten todos los movimientos coaccionados en la primera etapa y que abreviadamente se denominará por la sigla [u], ESTADO "u", o por el subíndice u.

      Para este segundo estado nuevamente se toma de cualesquiera de los textos de la bibliografía las solicitaciones producidas en una pieza por distintos movimientos impuestos en sus extremos.

La suma de ambos estados reproducirá el "real" de la estructura si se eligen acertadamente los movimientos del segundo (como en el ensayo antedicho). En realidad, al formular el análisis de una estructura estos movimientos en general no se conocen a priori, e intervienen por lo tanto en calidad de incógnitas.

Es obvio que cada uno de los estados es compatible y por lo tanto también su "suma". Por contra, en general ninguno de los dos estados está en equilibrio y por lo mismo tampoco estará en equilibrio su "suma", salvo para la situación excepcional en la cual los movimientos se sustituyen por sus valores reales hipotéticamente medidos en el ensayo ideal citado.

2. LOS MOVIMIENTOS (desplazamientos y/o giros) del segundo estado SE ADOPTAN COMO INCÓGNITAS. El número de tales incógnitas se denomina NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (NGL).

   El NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD no es una propiedad de la estructura sino del MODELO con el que se analiza la misma: existen multitud de posibilidades para elegir los estados [u] y [f] (aunque ambos están ligados). El NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD no coincide con el GRADO DE HIPERESTATISMO, salvo casualmente.

   Por ser las incógnitas magnitudes cinemáticas (desplazamientos y/o giros) los MÉTODOS DE EQUILIBRIO se denominan también MÉTODOS DE LOS DESPLAZAMIENTOS (aunque las incógnitas pueden ser desplazamientos y/o giros)

3. Se obtienen las resultante de fuerzas y/o momentos de cada uno de los nudos. Deben considerarse las ACCIONES NODALES correspondientes al primer estado (suma de las reacciones de cada una de las barras "empotradas" que acometen al nudo y eventualmente las acciones directamente aplicadas sobre el mismo) y las fuerzas y momentos que las barras ejercen sobre los nudos debido al estado [u].

   Estos últimos términos se escriben en función de los movimientos en los extremos de las barras (deformaciones generalizadas), mediante las RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES de cada barra y finalmente en función de los movimientos de los nudos a través de las ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.

   Las magnitudes del estado [u] se expresan en función de las incógnitas cinemáticas multiplicándolas por constantes de proporcionalidad denominadas "rigideces", por lo que el MÉTODO DE EQUILIBRIO se denomina también MÉTODO DE LA RIGIDEZ.

4. Se plantean las ECUACIONES DE EQUILIBRIO (de ahí el nombre de MÉTODO DE EQUILIBRIO) de los nudos, igualando a cero las resultantes anteriores.

   En el MÉTODO DE EQUILIBRIO existe siempre una CORRESPONDENCIA entre el tipo de incógnitas cinemáticas (movimientos y giros) y la naturaleza de las ecuaciones de equilibrio que deben escribirse (fuerzas y momentos), lo cual puede servir de ayuda en el momento de plantear estas ecuaciones.

   Aunque no es necesario respetar esta CORRESPONDENCIA hacerlo tiene grandes ventajas y se hará sistemáticamente en estos apuntes. No considerarla es una de las causas de la variedad de formalizaciones del método a la que se aludió previamente.

   Esta correspondencia se extiende también a las deformaciones (generalizadas) y esfuerzos, como se irá viendo en el desarrollo de estas lecciones. En la sección 2.6 se justificará la razón de estas sorprendentes relaciones.

5. Puesto que todas las fuerzas y momentos que las barras ejercen sobre los nudos han debido escribirse en función de los movimientos siguiendo el proceso ya comentado, se obtiene un SISTEMA LINEAL DE NGL ECUACIONES CON NGL INCÓGNITAS.

   Estas ecuaciones son de equilibrio, aunque las incógnitas que intervienen finalmente en las mismas son desplazamientos y/o giros.

6. La solución de dichas ecuaciones proporciona los valores de las incógnitas cinemáticas para las cuales LA "SUMA" de los dos estados cumple las condiciones de equilibrio. A partir de ellas se obtienen los esfuerzos en las barras del estado de nudos libres, que superpuestos a los del estado inicial de nudos empotrados dan lugar a un estado COMPATIBLE y EQUILIBRADO.

Dentro del ANÁLISIS NO LINEAL de estructuras los métodos de equilibrio deben formularse directamente para el estado de solicitaciones totales (por dejar de ser válido el principio de superposición), pero

las características indicadas en los párrafos 4 y 5 subsisten. Estas lecciones se refieren exclusivamente a técnicas de análisis lineal, donde es lógico formular los métodos de equilibrio según el resto de párrafos anteriores, ya que de ello se derivan algoritmos sistemáticos y eficientes incluso para sistemas con un número reducido de grados de libertad.

2.1 ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES

Se definen como INTRASLACIONALES aquellas estructuras, generalmente vigas o determinados pórticos, que pueden analizarse despreciarse los desplazamientos (u, v) de los nudos.

Por lo tanto las incógnitas que se adoptan para su análisis por el MÉTODO DE EQUILIBRIO, son tan sólo los GIROS de los nudos:

$$\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$$

siendo n el NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (NGL), de acuerdo con las definiciones del apartado anterior.

Aunque por su mayor sencillez se aborda en primer lugar el análisis de este tipo de estructuras, se advierte que en principio todo pórtico de edificación debe analizarse incluyendo como variables desconocidas a priori los desplazamientos de los nudos, siguiendo el procedimiento expuesto en los apartados 2.7 y siguientes.

Frecuentemente una estructura no es realmente intraslacional, sino que se MODELIZA como tal, sobre la base de diversas simplificaciones, lo que requiere un conocimiento riguroso de las condiciones de aplicación correspondientes. De otro modo puede incurrirse en graves errores de concepto, con consecuencias "dramáticas" sobre los resultados del análisis.

En ciertas ocasiones, como por ejemplo en el caso de determinados pórticos simétricos, la estructura se comporta como intraslacional para ciertas hipótesis de carga y como desplazable para otras.

Salvo en estructuras cuyas barras carecen de esfuerzos axiles (N), como es el caso de las vigas continuas, en todos los modelos intraslacionales se suponen despreciables los alargamientos o acortamientos de los ejes de las barras: hipótesis de INEXTENSIBILIDAD. Si en todas o parte de las barras (por ejemplo, en un tirante), se deben considerar sus alargamientos o acortamientos, su análisis por el MÉTODO DE EQUILIBRIO debe efectuarse mediante la técnica expuesta en el apartado 2.9.

Las hipótesis de simetría e inextensibilidad no son ni necesarias ni suficientes para la utilización de modelos intraslacionales. El conocimiento de las condiciones de aplicación de éstos, como de cualquier otro modelo de análisis, puede obtenerse de manera inductiva (por estudio de casos específicos), o deductiva, estableciendo un criterio general que por razones didácticas se enuncia en el apartado posterior 2.7

En las estructuras intraslacionales las ecuaciones de COMPATIBILIDAD, se reducen a IGUALAR LOS GIROS φ_i y φ_j de los extremos de cada barra, a los GIROS θ_a de los nudos a los que se une dicha barra.

Sin embargo no deben confundirse ambos tipos de magnitudes, a pesar de que en los problemas intraslacionales coincidan sus valores. Posteriormente se comprobará que las magnitudes φ y θ difieren si los extremos de la barra experimentan desplazamientos en dirección perpendicular a su eje.

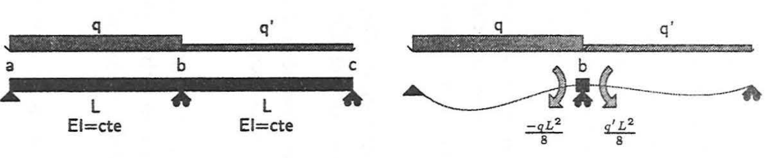
Como se ha indicado en el método de equilibrio existe una CORRESPONDENCIA entre el tipo de INCÓGNITAS (giros en este caso) y la naturaleza de las ECUACIONES DE EQUILIBRIO que deben plantearse, que por lo tanto en las estructuras intraslacionales serán ecuaciones de EQUILIBRIO DE MOMENTOS EN LOS NUDOS.

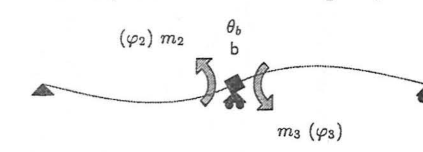
Como primer ejemplo de utilización del MÉTODO DE EQUILIBRIO se analiza la viga de dos tramos de la FIGURA 2.1. Se siguen las pautas expuestas en el apartado 2:

1. Se comienza definiendo los dos estados [f] y [u].

VIGA CONTINUA — ESTADO [f] — ESTADO [u]

Se adopta como INCÓGNITA el giro θ_b

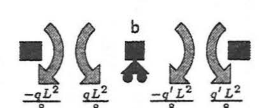




$\frac{-qL^2}{8}$ $\frac{q'L^2}{8}$

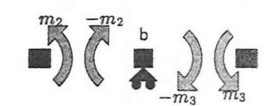
RESULTANTE DE MOMENTOS

Estado [f]



$\frac{-qL^2}{8}$ $\frac{qL^2}{8}$ $\frac{-q'L^2}{8}$ $\frac{q'L^2}{8}$

Estado [u]

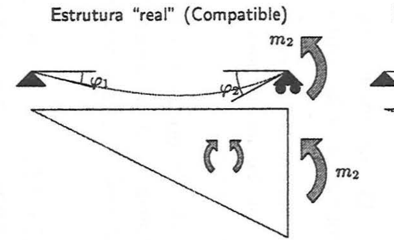


ECUACIÓN DE EQUILIBRIO (EQU).

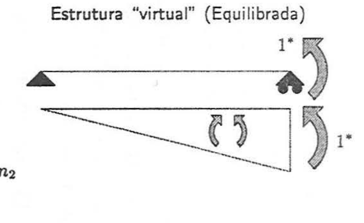
$$\frac{qL^2}{8} - \frac{q'L^2}{8} - m_2 - m_3 = 0$$
$$\frac{qL^2}{8} - \frac{q'L^2}{8} = m_2 + m_3$$

RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES (ECO) (COM)

Estrutura "real" (Compatible)



Estrutura "virtual" (Equilibrada)



W_{ext}=W_{int}

$1^*\varphi_2 = \int_0^L C \cdot M^* \cdot dx$

$\varphi_2 = \int_0^L \frac{m_2 \cdot \frac{x}{L}}{EI} \cdot \frac{x}{L} \cdot dx$

$\varphi_2 = \frac{L}{3 \cdot EI} m_2$

$m_2 = \frac{3 \cdot EI}{L}\varphi_2$

$m_2 = \frac{3 \cdot EI}{L}\varphi_2$ $\qquad \varphi_2 = \theta_a$

$m_3 = \frac{3 \cdot EI}{L}\varphi_3$ $\qquad \varphi_3 = \theta_a$

SUSTITUCIÓN DIRECTA

$\frac{qL^2}{8} - \frac{q'L^2}{8} = m_2 + m_3$

$= \frac{3 \cdot EI}{L}\varphi_2 + \frac{3 \cdot EI}{L}\varphi_3$

$= \frac{3 \cdot EI}{L}\theta_b + \frac{3 \cdot EI}{L}\theta_b$

$\frac{qL^2}{8} - \frac{q'L^2}{8} = \frac{6 \cdot EI}{L}\theta_b$

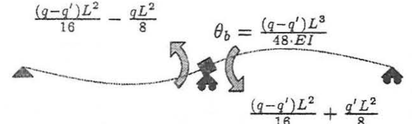
SOLUCIÓN DEL SISTEMA

$$\theta_b = \frac{(q-q')L^3}{48 \cdot EI}$$

PART. DEL ESTADO [u]

$$m_2 = \frac{3 \cdot EI}{L}\varphi_2 = \frac{3 \cdot EI}{L}\theta_b = \frac{(q-q')L^2}{16}$$
$$m_3 = \frac{3 \cdot EI}{L}\varphi_3 = \frac{3 \cdot EI}{L}\theta_b = \frac{(q-q')L^2}{16}$$

SUMA DE LOS ESTADOS [f] y [u]



COMPROBACIÓN DE EQUILIBRIO

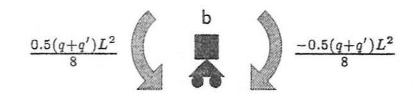


DIAGRAMA DE FLECTORES

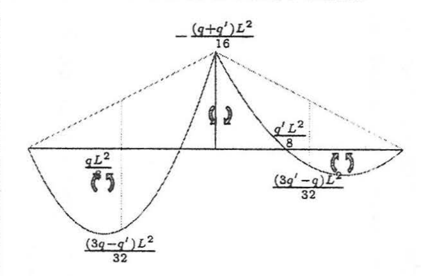
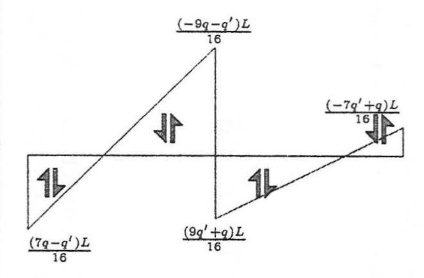
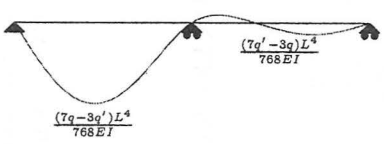


DIAGRAMA DE CORTANTES



DESPLAZAMIENTOS



GIROS

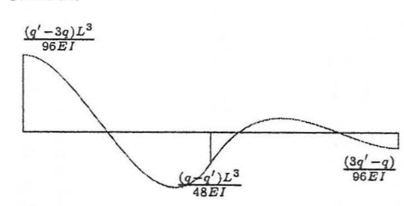


Figura 2.1: Viga continua

- En este caso, en el estado de nudos fijos sólo se impide el giro del nudo central. Se recuerda que es en este estado cuando se contabiliza la totalidad de las acciones que actúan sobre la estructura.
- Consecuentemente el estado de nudos libres queda caracterizado exclusivamente por un giro, el del nudo "b". Como se observa en la figura en este estado no se considera ninguna carga aplicada en el interior de las barras.

Ya se indicó que las posibilidades de modelizar una estructura son múltiples. En el ejemplo, otra opción válida consiste en impedir en el primer estado el giro de los tres apoyos. De este modo en el estado de nudos libres habría que considerar el giro de los tres nudos para que la suma de ambos estados pueda reproducir la situación "real" de la viga, en la que sin duda los tres nudos sobre los apoyos tendrán un giro no nulo.

2. Así las incógnitas del problema se reducen a una: el giro del nudo "b". Es un hecho casual el que el NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD coincida con el GRADO DE HIPERESTATISMO para el MODELO adoptado.

   Lo que no ocurriría de haber considerado una incógnita por cada apoyo de la viga. Las ventajas del MODELO que se analiza son manifiestas: se minimiza el número de incógnitas y consecuentemente el número de ecuaciones a plantear. Por contra el resultado del análisis del MODELO con tres GRADOS DE LIBERTAD serán los giros cada uno de los apoyos, mientras que con el MODELO propuesto los de los apoyos extremos deben obtenerse en una fase posterior

3. Se obtienen las resultantes de momentos en cada uno de los nudos. Los momentos en los extremos de cada una de las barras para el primer estado se calculan mediante las conocidas expresiones $\pm q \cdot L^2/8$.

   En el estado de nudos libres en el extremo 2 de la barra izquierda existirá un momento desconocido m_2 y otro m_3 en el extremo 3 de la barra derecha.

   Estos dos últimos momentos deben escribirse en función de los movimientos en los extremos de las barras. En la figura se calcula, mediante el principio de los trabajos virtuales, el giro φ_2 del extremo 2 de la primera viga cuando sobre su extremo derecho actúa el momento m_2. Despejando el momento se encuentra la relación $m_2 = (3 \cdot EI/L)\varphi_2$, que es la RELACIÓN ENTRE ESFUERZO Y DEFORMACIÓN de la primera viga. Del mismo modo se determina la de la viga derecha, que es idéntica. Finalmente deben expresarse los momentos m_2 y m_3 en función del giro θ_b del nudo "b" mediante las obvias ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD $\varphi_2 = \theta_b$ y $\varphi_3 = \theta_b$.

   Las constantes $3 \cdot EI/L$ que permite expresar los momentos m_2 y m_3 del estado 1 en función de los giros de los extremos de las dos vigas son las "rigideces" a las que se aludía en el apartado 2

4. Se plantea la ecuación de equilibrio de momentos del nudo "b". Nótese el CAMBIO DE SIGNO pues tanto m_2 y m_3 como los momentos de empotramiento se han determinado sobre los extremos de ambas vigas.

   La CORRESPONDENCIA entre el tipo de incógnitas (giro θ_b del nudo "b") y la naturaleza de las ecuaciones de equilibrio que se plantea (ecuación de equilibrio de momentos del nudo "b") es evidente.

5. Se ha obtenido un SISTEMA LINEAL DE NGL=1 ECUACIÓN CON NGL=1 INCÓGNITA.

6. La solución de dicha ecuación proporciona el valor del giro para el cual la suma de los dos estados cumple las condiciones de equilibrio.

7. Finalmente se comprueba que la estructura "real", suma del estado [u] y [f], esta EQUILIBRADA, (además de ser COMPATIBLE, pues tal como se han definido lo son los estados [u] y [f]).

2.2 ECUACIONES DE RIGIDEZ DE LA BARRA AISLADA INTRASLACIONAL

Estas ecuaciones constituyen las RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES a utilizar en las estructuras que se abordan en las presentes lecciones. Son por lo tanto una herramienta básica para su resolución.

Como en el problema con el cual se finalizó el apartado 2.1, cabría en cada estructura particular obtener las relaciones entre los momentos en los extremos de cada una de sus barras y los correspondientes giros. Sin embargo estas RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES se reducen a unas pocas, por lo que es más conveniente realizar su análisis de modo independiente y agrupar los resultados para su uso posterior, del mismo modo que se hace con los momentos de empotramiento para distintas acciones.

Siguiendo el esquema del apartado indicado se comienza determinando los giros en los extremos de una viga genérica con dos momentos m_1 y m_2 en los mismos, para posteriormente despejar estos. En la primera columna de la FIGURA 2.2 se calcula el del apoyo derecho haciendo uso del PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES. Se adopta un sistema virtual equilibrado de forma que el trabajo de las fuerzas exteriores coincida, en valor, con el movimiento (giro) buscado, lo que claramente ocurre si se considera un momento unidad positivo en el apoyo derecho. Recordando nuevamente el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN, el diagrama "real" de momentos flectores se escribe como la suma de tres términos: Uno correspondiente a las cargas que actúan sin considerar los momentos de los extremos (idéntico al de una viga isostática apoyada-apoyada con iguales acciones que la que se estudia, por lo que conoce como diagrama de momentos isostático) y otros dos debidos a cada uno de los dos momentos m_1 y m_2 de los extremos de la barra.

El trabajo virtual interno se evalúa calculando la integral extendida a la longitud de la viga del producto de la función del diagrama de flectores virtual y la que representa el diagrama de flectores "reales" dividida por EI (la función de curvaturas "reales"). Tras algunas operaciones elementales se escribe como la suma de tres términos. El primero no podrá integrarse hasta que se especifique la función de cargas q(s), pero obviamente representa el giro φ_{2I} que correspondería a una viga isostática apoyada-apoyada con iguales cargas que la analizada. Los otros dos términos se integran sin dificultad y cuantifican la contribución al giro del apoyo de cada uno de los dos momentos m_1 y m_2. El debido al momento situado en el extremo en el que se está calculando el giro es el doble, en valor absoluto, que el del contrario.

De igual modo se calcula el giro del apoyo izquierdo. En definitiva se tiene:

$$\varphi_1 = \varphi_{1I} + \frac{L}{3EI}\cdot m_1 - \frac{L}{6EI}\cdot m_2$$
$$\varphi_2 = \varphi_{2I} - \frac{L}{6EI}\cdot m_1 + \frac{L}{3EI}\cdot m_2$$

Las RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES buscadas se obtienen despejando los momentos m_1 y m_2 en las expresiones anteriores, con lo que, tras una manipulación puramente algebraica, resulta:

$$m_1 = \frac{4EI}{L}(\varphi_1 - \varphi_{1I}) + \frac{2EI}{L}(\varphi_2 - \varphi_{2I})$$
$$m_2 = \frac{2EI}{L}(\varphi_1 - \varphi_{1I}) + \frac{4EI}{L}(\varphi_2 - \varphi_{2I})$$

Por definición los MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTOS PERFECTO son los necesarios para anular los giros φ_1 y φ_2 de los extremos de la barra (para mantener FIJOS los nudos), es decir:

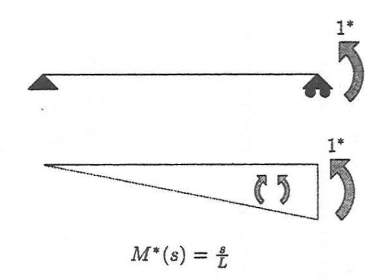
$$m_{1f} = \frac{4EI}{L}(0 - \varphi_{1I}) + \frac{2EI}{L}(0 - \varphi_{2I})$$
$$m_{2f} = \frac{2EI}{L}(0 - \varphi_{1I}) + \frac{4EI}{L}(0 - \varphi_{2I})$$

q(s)

m_1 m_2

$M(s) = M_I(q(s)) + \frac{s-L}{L}m_1 + \frac{s}{L}m_2$

$C(s) = \frac{M(s)}{EI}$



$M^*(s) = \frac{s}{L}$

$1^* \cdot \varphi_2 = \int_0^L C(s) \cdot M^*(s) ds$

$= \int_0^L \frac{M_I}{EI}\frac{s}{L}ds + \int_0^L \frac{m_1(s-L)}{EIL}\frac{s}{L}ds + \int_0^L \frac{m_2 s}{EIL}\frac{s}{L}ds$

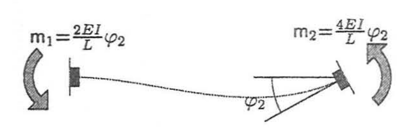
$\varphi_2 = -\frac{L}{6EI} \cdot m_1 + \frac{L}{3EI} \cdot m_2 + \varphi_{2I}$

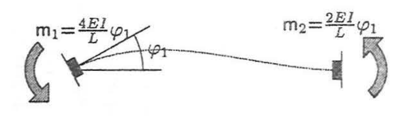
$\varphi_1 = \frac{L}{3EI} \cdot m_1 - \frac{L}{6EI} \cdot m_2 + \varphi_{1I}$

$m_1 = \frac{4EI}{L}(\varphi_1 - \varphi_{1I}) + \frac{2EI}{L}(\varphi_2 - \varphi_{2I})$

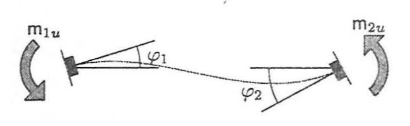
$m_2 = \frac{2EI}{L}(\varphi_1 - \varphi_{1I}) + \frac{4EI}{L}(\varphi_2 - \varphi_{2I})$

Barra genérica.





Superposición de deformadas y momentos





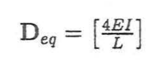
$m_{1u} = \frac{4EI}{L}\varphi_1 + \frac{2EI}{L}\varphi_2$

$m_{2u} = \frac{2EI}{L}\varphi_1 + \frac{4EI}{L}\varphi_2$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Barra con un extremo rígidamente empotrado.

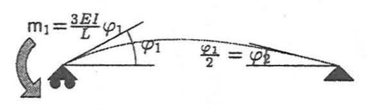
$m_1 = \frac{4EI}{L}\varphi_1$ $m_2 = \frac{2EI}{L}\varphi_1$

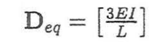


$\mathbf{D}_{eq} = [\frac{4EI}{L}]$



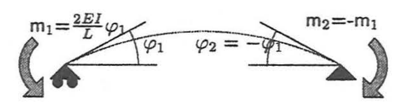
Barra con un extremo articulado.

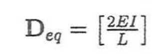




$\mathbf{D}_{eq} = [\frac{3EI}{L}]$

Barra con deformada simétrica.

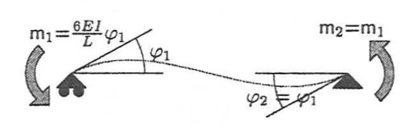




$\mathbf{D}_{eq} = [\frac{2EI}{L}]$



Barra con deformada antimétrica.



$\mathbf{D}_{eq} = [\frac{6EI}{L}]$

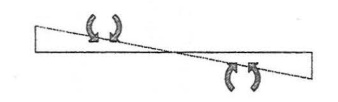


Figura 2.2: Ecuaciones de rigidez de la barra aislada intraslacional.

Valores que por otra parte se encuentran deducidos y tabulados en función de la ley de cargas en cualquier texto especializado (y en el apéndice B). Introduciendo estos resultados en las anteriores expresiones, se obtienen las RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES buscadas.

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{1f} + \frac{4EI}{L}\varphi_1 + \frac{2EI}{L}\varphi_2 = m_{1f} + m_{1u} \\ m_2 &= m_{2f} + \frac{2EI}{L}\varphi_1 + \frac{4EI}{L}\varphi_2 = m_{2f} + m_{2u} \end{aligned}$$

Las fórmulas anteriores muestran claramente que el análisis puede realizarse en las DOS ETAPAS siguientes, sumando algebraicamente, al final, los valores correspondientes:

- ESTADO [f], donde los nudos se suponen FIJOS (perfectamente empotrados: $\varphi_1 = 0 = \varphi_2$). En este estado los momentos de las barras son:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{1f} \\ m_2 &= m_{2f} \end{aligned}$$

  es decir, los MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO dados por fórmulas en función de las cargas de cada barra (incluidas en el APÉNDICE B). Así pues, LAS CARGAS DE LAS BARRAS SE CONSIDERAN INTEGRAMENTE EN LA ETAPA [f].

- ESTADO [u], donde se permiten los giros φ_1 y φ_2 de los nudos, con lo que aparecen los siguientes momentos de la barra:

$$\begin{aligned} m_{1u} &= \frac{4EI}{L}\varphi_1 + \frac{2EI}{L}\varphi_2 \\ m_{2u} &= \frac{2EI}{L}\varphi_1 + \frac{4EI}{L}\varphi_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

  Lógicamente EN EL ESTADO [u] NO SE CONSIDERAN LAS CARGAS DE LAS BARRAS, que ya han intervenido en la etapa [f], sino sólo el EFECTO DE LOS GIROS de los nudos.

Interesa interpretar las anteriores expresiones de m_{1u} y m_{2u} de la forma indicada en la segunda columna de la FIGURA 2.2, e introducir los conceptos de RIGIDEZ y TRASMISIÓN. Si se supone φ_1 nulo las expresiones antedichas describen una viga empotrada apoyada con un giro φ_2 en el apoyo. Como consecuencia de éste en el apoyo existe un momento proporcional al mismo, conociéndose como RIGIDEZ la constante de proporcionalidad entre ambos. De igual modo en el empotramiento aparece un momento del mismo signo que el del apoyo y cuyo valor es la mitad (TRASMISIÓN). Estos mismos resultados se encuentran si se analiza la viga empotrada-apoyada mediante el MÉTODO DE LA COMPATIBILIDAD.

En dicha figura se deducen de nuevo los momentos m_{1u} y m_{2u} considerados como "efectos" de giros impuestos φ_1 y φ_2, invirtiendo el concepto de causalidad de la misma manera que la deducción algebraica anterior es simplemente la inversión de una transformación entre variables.

Interesa ya familiarizarse con la NOTACIÓN MATRICIAL, que resulta de enorme utilidad conceptual y numérica para el desarrollo del MÉTODO DE EQUILIBRIO.

Se consideran las tres matrices siguientes:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$ (matriz 2x2, es decir, de 2 filas y dos columnas)

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$ (matriz de 2 filas y una columna, o "vector")

$$\mathbf{s}_u = \begin{bmatrix} m_{1u} \\ m_{2u} \end{bmatrix}$$ (matriz de 2 filas y una columna, o "vector")

En la primera se han reunido los coeficientes de rigidez de la barra (MATRIZ DE RIGIDEZ O CONSTITUTIVA DE LA BARRA), en la segunda los giros de sus extremos (VECTOR DE GIROS) y en la última los momentos del estado [u] (VECTOR DE SOLICITACIONES O MOMENTOS DEL ESTADO [u]), que intervienen en las ecuaciones escritas hasta ahora de forma algebraica.

Recordando como se multiplican matrices, se puede escribir:

$$\mathbf{s}_u = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e},$$

ya que:

$$m_{1u} = \tfrac{4EI}{L}\varphi_1 + \tfrac{2EI}{L}\varphi_2$$ ("primera fila de **D** por la columna **e**")

$$m_{2u} = \tfrac{2EI}{L}\varphi_1 + \tfrac{4EI}{L}\varphi_2$$ ("segunda fila de **D** por la columna **e**")

Por lo tanto, para el estado [u], LAS ECUACIONES DE RIGIDEZ DE LA BARRA AISLADA INTRASLACIONAL, SE ESCRIBEN MATRICIALMENTE EN LA FORMA $\mathbf{s}_u = \mathbf{D}\cdot\mathbf{e}$, o bien $\mathbf{s} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{e}$ cuando la omisión del subíndice [u] no induzca a confusión, pudiéndose dar por sobreentendido.

Es importante observar que la matriz **D** es SIMÉTRICA (con respecto a su diagonal principal). La matriz anterior se denominará en apartados posteriores matriz constitutiva estándar 2x2, o matriz 4-2-2-4.

Para su aplicación en apartados posteriores, y para tener de forma compendiada las diversas matrices de rigidez de barra que se manejan, se deducen aquí las matrices modificadas o "equivalentes" más comunes (tercera columna de la FIGURA 2.2), de una sola fila y una sola columna (es decir, de un único coeficiente)

- Barra con un EXTREMO RÍGIDAMENTE EMPOTRADO:

  Introduciendo en la primera de las ecuaciones generales 2.1 la condición φ_2=0, se deduce:

  $$[m_{1u}] = \left[\frac{4EI}{L}\right] \cdot [\varphi_1]\,,\ \mathbf{D}_{eq} = \left[\frac{4EI}{L}\right]$$

  De la segunda ecuación de 2.1 se obtiene que el momento en el empotramiento $m_{2u} = \frac{2EI}{L}\varphi_1 = \frac{1}{2}m_{1u}$, de acuerdo con la regla de la transmisión de la que debe tomarse buena nota de que sólo es válida para el ESTADO [u] DE BARRAS INTRASLACIONALES.

  Es decir, la "trasmisión" del momento mitad sólo se puede aplicar para los términos m_u. Nunca para los momentos m_f o la suma m_u+m_f.

  EN NINGÚN CASO SE PUEDE APLICAR PARA BARRAS CON DESPLAZAMIENTOS DIFERENCIALES EN SUS EXTREMOS EN DIRECCIÓN PERPENDICULAR A SU EJE.

- Barra con un EXTREMO ARTICULADO:

  Se introduce en las ecuaciones generales 2.1 la condición m_2=0. Resulta:

  $$[m_{1u}] = \left[\frac{3EI}{L}\right] \cdot [\varphi_1]\,,\ \mathbf{D}_{eq} = \left[\frac{3EI}{L}\right]$$

  La segunda de las ecuaciones citadas muestra que el giro $\varphi_2 = -\frac{1}{2}\varphi_1$ no es independiente de φ_1, por lo que puede no tomarse como una auténtica incógnita del problema, y no incluirlo como un grado de libertad, aunque sea distinto de cero.

- Barra con DEFORMADA SIMÉTRICA:

Particularizando $\varphi_2 = -\varphi_1$ en las ecuaciones generales se deduce:

$$[m_{1u}] = \left[\frac{2EI}{L}\right] \cdot [\varphi_1] \, , \, \mathbf{D}_{eq} = \left[\frac{2EI}{L}\right]$$

De nuevo se considera explícitamente como incógnita φ_1, por estar φ_2 relacionado con el anterior, aun siendo no nulo.

Si se considera la segunda de las ecuaciones 2.1 se obtiene $\mathrm{m}_{2u} = -\frac{2EI}{L} = -\mathrm{m}_{1u}$, lo cual es coherente con la propiedad de simetría, que obliga a que los momentos en los extremos de la barra sean iguales en valor absoluto y tengan distinto signo. La distinción entre "momento" y "flector" es esencial, puesto que el flector en las rebanadas extremas de la barra son iguales incluso en signo (v. FIGURA 2.2). Se recuerda que los esfuerzos internos no deben contemplarse como fuerzas o momentos aislados, sino como parejas de fuerzas o momentos en las dos caras, frontal y dorsal, de una misma rebanada de la pieza.

- Barra con DEFORMADA ANTIMÉTRICA:

  Partiendo de las ecuaciones generales y la condición $\varphi_2 = \varphi_1$, se obtiene:

$$[m_{1u}] = \left[\frac{6EI}{L}\right] \cdot [\varphi_1] \, , \, \mathbf{D}_{eq} = \left[\frac{6EI}{L}\right]$$

De nuevo se considera explícitamente como incógnita φ_1, por estar φ_2 relacionado con el anterior.

Si se considera la segunda de las ecuaciones 2.1 se obtiene $\mathrm{m}_{2u} = -\frac{6EI}{L} = \mathrm{m}_{1u}$, lo cual es coherente con la propiedad de antimetría, que obliga a que los momentos en los extremos de la barra sean iguales en valor absoluto y en signo. En cambio, el flector en las rebanadas extremas de la barra son iguales en valor absoluto pero con signos contrarios (v. FIGURA 2.2).

Obsérvese que en la deformada antimétrica existe un punto de inflexión (cambio de curvatura) en su centro, lo cual es coherente con el cambio de signo en el diagrama de flectores.

2.3 ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES DE UN GRADO DE LIBERTAD.

La FIGURA 2.3 contiene un ejemplo completo de aplicación del MÉTODO DE EQUILIBRIO a un pórtico modelizable como estructura intraslacional de un solo grado de libertad. Puede analizarse como tal, a pesar de su evidente entidad, sobre la base de diversas simplificaciones.

Este ejemplo da pie a diversas enseñanzas relativas al proceso de MODELIZACIÓN previo al análisis por el MÉTODO DE EQUILIBRIO, que pasa necesariamente por un ESTUDIO CUALITATIVO PREVIO DE LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA, aspecto de vital importancia y que requiere una intuición correcta del comportamiento estructural.

En primer lugar, se suponen despreciables los alargamientos o acortamientos de los ejes de las barras, por lo cual LOS NUDOS NO EXPERIMENTAN DESPLAZAMIENTOS VERTICALES ($\mathrm{v} = 0$), al estar ligados a la cimentación por soportes "inextensibles", y suponerse nulos los asientos de las cimentaciones.

TAMPOCO PUEDEN EXPERIMENTAR DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES ($\mathrm{u} = 0$), ya que al estar ligados los tres nudos de la planta por las vigas, también "inextensibles", cualquier desplazamiento horizontal obligaría a toda la planta a moverse, dando origen a una deformada no simétrica con respecto a su eje medio. Esto sería contradictorio con la simetría del problema (simetría de geometría, constitución, sustentación y acciones).

Por todo ello este pórtico, BAJO LAS CARGA INDICADAS y para un análisis lineal, se puede considerar INTRASLACIONAL.

Del mismo modo, siempre que la deformada pueda suponerse simétrica, EL GIRO EN EL PUNTO MEDIO ES CERO (cualquier deformada con tangente no horizontal en el eje medio resultaría ser no simétrica).

PÓRTICO SIMÉTRICO

239 kN 308 kN 38.5 kN/m 308 kN 239 kN
a b c
L_v=7.25 m IPE 550 I_v=67120
4 m 3.25 m 2 m
9,4 kN
L_s=6 m HEB 220 I_s=8091
4 m

ESTADO [f]

239 kN 308 kN 38.5 kN/m 308 kN 239 kN
-190.1 473.3 -416.2 416.2 -473.3 190.1
10.45 0 10.45
9,4 kN 9.4 kN

ESTADO [u]

θ_a θ_b θ_c
a b c
m_1 φ_1 m_2 φ_2 m_3 φ_3 m_4 φ_4 m_5 φ_5 m_6 φ_6 m_7 φ_7

VARIABLES

Nudos

θ_a m_a

$u = [\theta_a]$ $f = [m_a]$

Barras

φ_1 m_1

φ_2 m_2

$e = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$ $s = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$

Estado [f]

190,1 a -473,3 -10,45

Estado [u]

a $-m_2$ $-m_1$

EQU

$$m_a - m_1 - m_2 = 0$$
$$m_a = m_2 + m_3$$
$$m_a = -293,7kN \cdot m$$

COM

$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$
$f = H \cdot s$

$\varphi_1 = \theta_a$
$\varphi_2 = \theta_a$

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$e = B \cdot u$

$\boxed{H = B^t}$

REL ESF/DEF

$$m_1 = \frac{3 \cdot EI_s}{L_s}\varphi_1$$
$$m_2 = \frac{4 \cdot EI_v}{L_v}\varphi_2$$

$D = \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot EI_s}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{4 \cdot EI_v}{L_v} \end{bmatrix}$

$s = D \cdot e$

SUSTITUCIÓN DIRECTA

$$m_a = m_1 + m_2$$
$$= \frac{3 \cdot EI_s}{L_s}\varphi_1 + \frac{4 \cdot EI_v}{L_v}\varphi_2 = 8495,5\varphi_1 + 77766\varphi_2$$
$$= \frac{3 \cdot EI_s}{L_s}\theta_a + \frac{4 \cdot EI_v}{L_v}\theta_a = 862628\theta_a$$
$$-293,7 = 862628\theta_a$$

$f = H \cdot s$
$= B^t \cdot s$
$= B^t \cdot D \cdot e$
$f = B^t \cdot D \cdot B \cdot u$

$$[m_a] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot EI_s}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{4 \cdot EI_v}{L_v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\theta_a]$$
$$[-293,7] = [86262][\theta_a]$$

SOLUCIÓN

$$\theta = -0.003405 \ (\varphi_1 = \varphi_2 = -0.003405)$$
$$m_1 = \frac{3 \cdot EI_s}{L_s}\varphi_1 = -28,93$$
$$m_2 = \frac{4 \cdot EI_v}{L_v}\varphi_2 = -264,8$$

$$[\theta_a] = [86262]^{-1} \cdot [-293,7]$$
$$s = D \cdot e = D \cdot B \cdot u$$
$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot EI_s}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{4 \cdot EI_v}{L_v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\theta_a]$$

SUMA DE ESTADOS [f] y [u]

$$m_1 = 10,45 - 28,93 = -18,48$$
$$(m_{1u}) \quad (m_{1f})$$

$$m_2 = 473,3 - 264,8 = 208,6$$
$$(m_{2u}) \quad (m_{2f})$$

COMPROBACIÓN EQU
18,48-208,6+190,1=0

-190.1
208.6[u+f]
-264.8[u]
473.3[f]
-548.6[u+f]
-132.4[u]
-416.2[f]
-18.48[u+f]
-28.93[u]
-10.45[f]
0

DIAGRAMA DE M (kN m)

-548.6
-190.1 -208.6
18.48
802.7
24.85
441.6

DIAGRAMA DE V (kN)

-239 267.9
-324.5
-170.5
3.186
137.5
3.186 6.214
262.6
6.214

DIAGRAMA DE N (kN)

3.186 3.186
-530.5 -649.0
-530.5 -649.0

DESPLAZAMIENTOS (m)

-.2304e-2
.9251e-2
.4572e-2

Figura 2.3: Pórtico simétrico con un grado de libertad.

Cuando, ADEMÁS, EL EJE DE SIMETRÍA COINCIDE CON UN SOPORTE QUE IMPIDA EL DESPLAZAMIENTO VERTICAL (o un apoyo), como sucede en este caso, el punto medio de la estructura equivale a un EMPOTRAMIENTO, ya que ni se desplaza ni gira.

Si no existiera ningún soporte o apoyo externo en dicho punto que impidiera el desplazamiento, modelizar el punto central como un empotramiento sería un GRAVÍSIMO ERROR DE CONCEPTO, que conduciría a resultados absolutamente erróneos.

En este caso se dan las dos condiciones necesarias para poder reemplazar dicho punto por un empotramiento, lo que permite la importante simplificación de poder analizar, muy fácilmente, sólo media estructura (por ejemplo la situada a la izquierda del eje de simetría).

En ésta quedan como únicos grados de libertad posibles el giro θ_a del nudo "a" de la figura, y el giro de la articulación situada bajo el mismo, es decir, dos grados de libertad.

Pero en realidad, en el estado [u], el giro de un apoyo articulado no es independiente del giro del otro nudo de la barra, lo cual permite tomar como única incógnita cinemática efectiva de este problema el giro θ_a. Así, finalmente, se obtiene un MODELO DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD.

Obviamente esto es muy favorable en un cálculo MANUAL, ya que se requerirá SÓLO UNA ECUACIÓN para poder determinar esa única incógnita.

Sin embargo, para cálculos en computador, dada su capacidad y rapidez actuales, puede ser preferible no hacer uso de estas técnicas de reducción de grados de libertad, que incrementan la casuística y hacen los programas menos sistemáticos.

También sería perfectamente factible manejar en un cálculo manual las dos incógnitas θ_a y θ', ya que el número necesario de ecuaciones (dos) seguiría siendo manejable. En caso de seguir esta alternativa, podría utilizarse para el soporte la matriz de rigidez general (2x2) y los momentos de empotramiento de la viga biempotrada (sin corregir por la existencia de articulación). En tal caso el procedimiento a seguir sería el correspondiente a estructuras intraslacionales de varios grados de libertad, expuesto en los apartados siguientes.

Siguiendo las pautas generales indicadas en el inicio del capítulo 2, se considera un primer ESTADO DE NUDOS FIJOS, donde ficticiamente se obliga a que el grado de libertad de la estructura sea cero ($\theta_a = 0$).

Al impedir el giro θ_a, el voladizo se comporta como una MÉNSULA EMPOTRADA, cuyo momento de empotramiento se determina mediante un cálculo isostático de la misma, trivial salvo por el hecho de que es preciso un RIGOR ABSOLUTO EN LA ASIGNACIÓN DE SIGNOS (aquí el momento sobre el extremo del voladizo es negativo, ya que el momento que recibe la ménsula en su empotramiento es en este caso horario; no ocurría lo mismo si se analizase la media estructura derecha, en cuyo caso el flector seguiría siendo negativo mientras que el momento sobre el extremo de la ménsula sería positivo).

Es evidente que resulta indispensable la distinción entre MOMENTOS y MOMENTOS FLECTORES, a efectos asignación de signos. El MÉTODO DE EQUILIBRIO maneja MOMENTOS: en el proceso se planteará el equilibrio del nudo "a" en el que intervendrán MOMENTOS, nunca FLECTORES.

Asimismo, al coaccionarse el giro θ_a, la viga se comporta como una VIGA BIEMPOTRADA, cuyos momentos de empotramiento m_{2f} y m_{3f} se calculan mediante las fórmulas explícitas incluidas en el apéndice B.

En cuanto al soporte, que en este problema también recibe cargas directas perpendiculares a su directriz, al impedirse el giro θ_a, se comporta como una VIGA EMPOTRADA-ARTICULADA, que a pesar de estar orientada verticalmente, admite la aplicación de las fórmulas apéndice B, en función de las cargas perpendiculares a su eje.

En materia de SIGNOS, cuya importancia ya se ha resaltado, se recomienda, en caso de duda, asignarlos FÍSICAMENTE:

1. Dibujar la deformada de las piezas en esta etapa [f].

2. Visualizando la curvatura en la proximidad de los extremos de la barra, se aprecia claramente la verdadera orientación de cada momento, asociado a la convexidad o concavidad de la deformada en las proximidades del empotramiento.

3. Asignarles el signo correcto, positivos si son antihorarios o negativos si son horarios, es entonces ya trivial.

Es asimismo muy recomendable, en los cálculos manuales, organizar metódicamente todos los números, en forma de CUADRO sobre un esquema de la propia estructura, donde se deben escribir ya los valores de los momentos m_{if} anteriormente obtenidos sobre los extremos de cada barra (última fila de la FIGURA 2.3).

Los momentos totales en los extremos de cada barra son la suma de los del estado de nudos fijos ya calculados y los del estado de nudos libres: $m_i = m_{if} + m_{iu}$. Al final del proceso, los términos m_{iu} se escriben en el mismo cuadro y se suman algebraicamente a los anteriores, consignándose el momento final m_i.

Los momentos en los extremos de las barras en el ESTADO DE NUDOS LIBRES (momentos m_i en la FIGURA sin el subíndice u) se obtienen a partir de las RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES de acuerdo con lo expuesto en el apartado 2.2. Se han aplicado las rigideces "equivalentes" siguientes:

- Viga (barra con un extremo rígidamente empotrado): $m_2 = \frac{4EI_v}{L_v}\varphi_2$
- Soporte (barra con un extremo articulado): $m_1 = \frac{3EI_s}{L_s}\varphi_1$
- El voladizo no interviene en el estado [u], ya que se limita a girar acompañando al nudo, sin aportarle ninguna rigidez (no obstante el voladizo se ha considerado en la etapa [f]).

Los extremos de las barras unidas al nudo "a", transmiten a éste momentos contrarios. Al escribir la ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DE MOMENTOS DEL NUDO "a"

$$0 = \sum(-m) = -\sum m_f - \sum m_u,$$

obviamente se pueden pasar los términos desconocidos m_u al primer miembro, y se obtiene:

$$\sum m_u = m_a,$$

siendo:

$$m_a = -\sum m_f,$$

donde se agrupan los valores conocidos en esta etapa. La magnitud m_a recibe el nombre de ACCIÓN NODAL EQUIVALENTE (porque de alguna manera recoge el efecto que sobre el nudo ejercen las cargas de las diversas barras conectadas a él). A los momentos del estado de nudos fijos habrá que añadir los momentos directamente aplicados sobre el nudo; si en la MODELIZACIÓN se hubiese sustituido el voladizo por un momento y una reacción equivalentes sobre el nudo "a" a la hora de estimar m_a habría que sumar dicho momento a los de empotramiento de la viga y el soporte (cambiados de signo).

LA ACCIÓN NODAL EQUIVALENTE ES IGUAL A LA SUMA ALGEBRAICA DE LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO DE LOS EXTREMOS DE LAS BARRAS QUE ACOMETEN AL NUDO CAMBIADOS DE SIGNO Y LOS MOMENTOS DIRECTAMENTE APLICADOS SOBRE EL MISMO (ESTOS CON SU SIGNO).

Obsérvese que LAS CARGAS DE LAS BARRAS INTERVIENEN SÓLO EN LA ETAPA [f], MIENTRAS QUE EN EL ESTADO [u] SÓLO HAY GIROS EN LOS NUDOS.

Como se indicó en el inicio del capítulo 2 en todo análisis de estructuras hiperestáticas deben intervenir las ecuaciones de COMPATIBILIDAD que, en este caso, se reducen a IGUALAR LOS GIROS φ_1 y φ_2 de los extremos superior del soporte e izquierdo de la viga, al giro θ_a del nudo al cual se unen.

REEMPLAZANDO ESTOS VALORES EN LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DEL NUDO $\sum m_i = m_a$ (se ha omitido el subíndice u), se obtiene:

$$\left(\frac{3EI_s}{L_s} + \frac{4EI_v}{L_v}\right)\theta_a = \sum k_i\theta_a = m_a,$$

de donde resulta:

$$\theta_a = m_a / \sum k_i \quad = \text{giro del nudo} = \text{-0.003405 radianes}$$

Una vez conocido el valor de θ_a, se pueden calcular los momentos m_i del estado de nudos libres, y COMPLETAR LA TABLA DE MOMENTOS, tal como se indica en la figura.

Para la estructura estudiada, de un sólo grado de libertad, se deduce, haciendo uso del resultado anterior, que los momentos del estado de nudos libres m_i valen $k_i\theta_a = m_a \cdot (k_i / \sum k_i)$, es decir se produce un REPARTO de la acción nodal PROPORCIONAL A LA RIGIDEZ de cada elemento.

Si bien esta sencilla regla no es válida para las estructuras de mayor número de grados de libertad, sin embargo es generalmente cierto que en LAS ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS LOS ELEMENTOS MÁS RÍGIDOS TIENDEN A ABSORBER MÁS SOLICITACIÓN QUE LOS MÁS DEFORMABLES. (Esa noción puede ser muy útil para comprender cualitativamente la forma de trabajo de estructuras mucho más complejas).

Una conclusión, muy notable, es la de que LOS ESFUERZOS DE LAS PIEZAS DE UNA ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA DEPENDEN DE LAS PROPORCIONES ENTRE LAS RIGIDECES DE LAS DIVERSAS BARRAS. Si esas proporciones se alteran de forma apreciable, en rigor es preciso un recálculo de la estructura.

Así, en el ejemplo, los datos de las inercias (I_v, I_s), se han tomado sobre la base de un PREDIMENSIONADO de las barras que componen la estructura. Si de la comprobación resistente y deformativa final surgiera la necesidad de modificar las piezas, sería en rigor preciso un recálculo completo.

Entonces, como los elementos que se aumenten de sección (en su caso) tendrán mayor rigidez y por lo tanto absorberán mayor solicitación, pueden requerirse varios tanteos hasta ajustar definitivamente la solución. De ahí la importancia de un predimensionado apropiado, basado generalmente en la experiencia de proyecto de casos similares.

Volviendo al problema de la FIGURA 2.3, la COMPROBACIÓN FINAL DE EQUILIBRIO DEL NUDO, $\sum m = 0$, en base a los momentos finales (totales [f]+[u]), es sencilla y OBLIGADA.

En el extremo derecho de la viga, que se ha supuesto rígidamente empotrado, de acuerdo con la regla de la "TRANSMISIÓN", el momento m_3 es igual a $m_2/2$, debiendo observarse que SÓLO SE TRANSMITE EL MOMENTO DEL ESTADO DE NUDOS LIBRES, y no el término del estado [f].

Además, se reitera que dicha regla de TRANSMISIÓN SÓLO ES VÁLIDA PARA BARRAS INTRASLACIONALES.

En la FIGURA se han indicado los DIAGRAMAS FINALES DE ESFUERZOS Y LAS FLECHAS DE LAS BARRAS:

1. Conocidos los momentos de los extremos de cada barra, su diagrama de FLECTORES puede calcularse numérica o gráficamente según procedimientos ya conocidos de la Teoría de Vigas.

2. Los esfuerzos CORTANTES (V) pueden determinarse por condiciones de equilibrio de momentos y fuerzas perpendiculares al eje de cada barra, aislada del resto de la estructura, sometida a sus momentos de extremo (ya conocidos) y a sus cargas directas.

3. Los esfuerzos axiles o NORMALES (N) de los soportes, se determinan por equilibrio de fuerzas verticales de los nudos, resultando típicamente que su valor es la suma de los valores absolutos de los cortantes que las vigas y voladizos entregan al soporte por encima de la sección considerada, sin olvidar los de posibles vigas o zunchos transversales al pórtico.

   Los esfuerzos N de las vigas generalmente resultan de muy escasa trascendencia en los pórticos típicos de edificación, y en caso necesario pueden determinarse por equilibrio de fuerzas horizontales de los nudos (ocasionalmente este problema puede a su vez resultar hiperestático).

   En caso de existir barras inclinadas (o, con más propiedad, cargas con componentes paralelas al eje de las pieza), al ser los diagramas de N variables a lo largo de la pieza, su determinación exigirá considerar el equilibrio de fuerzas longitudinales de la misma.

4. Conocidas las solicitaciones, pueden calcularse FLECHAS (características), TENSIONES (ponderadas), etc.

Aunque en los cálculos mecanizados pueden incorporarse tantos nudos intermedios como puntos de "información" se desee en la salida de resultados, para aplicaciones docentes resulta más formativo efectuar explícitamente el anterior proceso, barra por barra.

Conocidos los momentos finales en los extremos de la viga, el cálculo de la flecha en el punto medio de la misma puede realizarse aplicando el TEOREMA DE LA CARGA UNIDAD, ya utilizado en otros apartados. Para su aplicación se puede adoptar como diagrama de flectores virtuales M*, que basta sea EQUILIBRADO con la carga virtual 1* (aplicada en el punto medio), el correspondiente a una viga isostática biapoyada aunque no cumpla las condiciones de compatibilidad de la estructura "real". La integral

$$v = \int_0^L (M^* M/EI)dx,$$

se ha calculado en la figura aplicando la tabla de integración incluida en el apéndice A. Se encuentra un valor exacto de v, si se realiza en los tres intervalos [0,3.250], [3.250,L/2] y [L/2,L].

En la figura se ha introducido nuevamente la NOTACIÓN MATRICIAL. En primer lugar las distintas magnitudes estáticas y cinemáticas que aparecen en la formulación del problema se agrupan en los siguientes vectores: Las relacionadas con los nudos en los vectores de acciones nodales y movimientos nodales (**f** y **u** respectivamente), y los giros relativos en los extremos de las barras y sus correspondientes momentos (magnitudes de "barras") en los vectores **e** y **s**.

La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales de equilibrio **H** se llamará, por razones obvias, MATRIZ DE EQUILIBRIO. Las ecuaciones de equilibrio se escribirán matricialmente como $\mathbf{f} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}$.

De igual modo, la matriz de coeficientes del sistema lineal de ecuaciones de compatibilidad **B** se denominará MATRIZ DE COMPATIBILIDAD escribiéndose simbólicamente el sistema de ecuaciones como sigue: $\mathbf{e} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$.

Obsérvese que en la FIGURA la matriz de equilibrio es traspuesta de la de compatibilidad **H**; resultado no casual como se demostrará en la sección 2.6 (siempre que se tomen unas precauciones determinadas al ordenar las variables y las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad).

Finalmente, las ecuaciones lineales que relacionan los giros en los extremos de las barras con sus momentos en el estado de nudos libres pueden escribirse matricialmente mediante la matriz D que se denominará MATRIZ CONSTITUTIVA: $\mathbf{s} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}$.

El sistema de ecuaciones (en el ejemplo de la figura se reduce a una sola ecuación) que permite determinar los movimientos de la estructura se obtiene introduciendo en las ecuaciones de equilibrio, primero las relaciones esfuerzos-deformaciones y luego las de compatibilidad, lo que matricialmente se expresa:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} \\ &= \mathbf{B^t} \cdot \mathbf{s} \\ &= \mathbf{B^t} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} \\ \mathbf{f} &= \mathbf{B^t} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

es decir, basta determinar la matriz de equilibrio o la de compatibilidad (al ser una traspuesta de la otra), junto con la constitutiva y realizar los productos matriciales anterior para determinar el sistema de ecuaciones buscado. La matriz de este sistema $\mathbf{K} = \mathbf{B^t} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$ se conoce como MATRIZ DE RIGIDEZ de la estructura. Los movimientos de la misma (en este caso únicamente el giro θ_a) se determinan sin más que multiplicar por la matriz inversa de la de rigidez el vector de acciones nodales

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{K^{-1}} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{K^{-1}} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{K^{-1}} \cdot \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Determinado el vector **u** se calculan los giros en los extremos de barra mediante las ecuaciones de compatibilidad y a continuación los momentos m_i del estado de nudos libres mediante las relaciones entre

esfuerzos y deformaciones. Operaciones que matricialmente vuelven a reducirse a dos multiplicaciones:

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}$$
$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

Debe recordarse que EL PRODUCTO MATRICIAL NO ES CONMUTATIVO, es decir, si se desea operar "en calculadora" con la formalización anterior, las multiplicaciones deben realizarse exactamente en el orden en que se han escrito (sin embargo el producto matricial si es asociativo; en los productos en que intervienen más de dos matrices, dos a dos pueden multiplicarse en el orden deseado).

Para los cálculos mecanizados de estructuras con elevado número de grados de libertad, extensas áreas de la matriz $\mathbf{K}$ suelen estar constituidas por ceros, lo cual permite almacenar y manejar sólo una parte de $\mathbf{K}$, con la consiguiente optimización de requerimientos de capacidad de memoria y tiempos de cálculo. Se adoptan entonces otros algoritmos numéricos para la resolución de los sistemas de ecuaciones $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$, que no pasan por la formación de la matriz inversa $\mathbf{K}^{-1}$, la cual generalmente no es "dispersa".

2.4 VIGAS CONTINUAS.

La FIGURA 2.4 incluye el cálculo de una vigueta continua de un forjado unidireccional. El proceso seguido es análogo al seguido en el apartado anterior, salvo por los siguientes aspectos:

- En este caso el modelo adoptado tiene DOS GRADOS DE LIBERTAD efectivos, con dos incógnitas θ_b y θ_c. El giro θ_d es nulo por la simetría del problema, lo que permite analizar sólo media estructura, según se indica en la figura. Además, el giro θ_a, aun no siendo nulo, puede no incluirse como variable independiente en el análisis, aplicando criterios de reducción de libertad ya deducidos (apartado 2.2).
- Es importante en el método de equilibrio mantener la CORRESPONDENCIA entre el tipo de incógnitas cinemáticas y las ecuaciones de equilibrio que se plantean: CONSECUENTEMENTE SE ESCRIBIRÁN LAS DOS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE MOMENTOS DE LOS NUDOS b Y c.
- Como ya es sabido, el giro del nudo extremo "a" puede excluirse de las variables independientes del proceso, siempre que para la barra izquierda se apliquen:
  - El momento de empotramiento de barra empotrada-articulada ($m_{bf} = -qL^2/8$), en el estado [f] (v. apéndice B)
  - La ecuación constitutiva $m_2 = \frac{3EI}{L}\varphi_2$ (matriz constitutiva $\mathbf{D}_1 = [3EI/L]$) en el estado [u] (v. apartado 2.2)
- Para la BARRA 2 se deben tomar:
  - Los momentos de empotramiento de barra biempotrada:

$$m_{3f} = \frac{qL^2}{12} \quad \text{y} \quad m_{4f} = \frac{-qL^2}{12}$$

  - Las RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN de una barra general:

$$\begin{matrix} m_3 = 4EI/L\varphi_3 + 2EI/L\varphi_4 \\ m_4 = 2EI/L\varphi_3 + 4EI/L\varphi_4 \end{matrix} \qquad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L \\ 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix}$$

- Para la tercera BARRA se deben utilizar:
  - Los momentos de empotramiento de barra biempotrada:

$$m_{5f} = qL^2/12 \quad \text{y} \quad m_{6f} = -qL^2/12$$

VIGA CONTINUA

$q = 4{,}9\ \frac{kN}{m}$

a b c d e f g

L=5.000 EI=cte — L=5.000 EI=cte

ESTADO [f]

q

$-\frac{qL^2}{8}$ $\frac{qL^2}{12}$ $-\frac{qL^2}{12}$ $\frac{qL^2}{12}$ $-\frac{qL^2}{12}$

θ_b θ_c

ESTADO [u]

m_1 m_2 m_3 m_4 $\frac{m_4}{2}=m_5$

Nudos		Barras	
θ_b	m_b	φ_1	m_1
θ_c	m_c	...	...
		φ_4	m_4

$$u = \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} m_b \\ m_c \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_4 \end{bmatrix}$$

Estado [f] — Estado [u] — Estado [f] — Estado [u] — EQU

$\frac{qL^2}{8}$ (15.31) $-\frac{qL^2}{12}$ (-10.21) $-m_1$ $-m_2$ $\frac{qL^2}{12}$ (10.21) $-\frac{qL^2}{12}$ (-10.21) $-m_3$ $-m_4$

$$m_b = m_1 + m_2 \qquad m_c = m_3 + m_4$$

$m_b = 5.104$ kN·m $\qquad m_c = 0$ kN·m

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f = H \cdot s$$

$$f = [\ 5.104 \quad 0\ ]^t$$

COM

$$\varphi_1 = \theta_b \quad \varphi_2 = \theta_b \quad \varphi_3 = \theta_c \quad \varphi_4 = \theta_c \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e = B \cdot u$$

$$\boxed{H = B^t}$$

ECO

$$m_1 = \frac{3 \cdot EI}{L}\varphi_1$$
$$m_2 = \frac{4 \cdot EI}{L}\varphi_2 + \frac{2 \cdot EI}{L}\varphi_3$$
$$m_3 = \frac{2 \cdot EI}{L}\varphi_2 + \frac{4 \cdot EI}{L}\varphi_3$$
$$m_4 = \frac{4 \cdot EI}{L}\varphi_4$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4 \cdot EI}{L} & \frac{2 \cdot EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{2 \cdot EI}{L} & \frac{4 \cdot EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4 \cdot EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$s = D \cdot e$$

$$K = B^t \cdot D \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L} + \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = [\ 1 \quad 0\ ] \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_3 = [\ 0 \quad 1\ ] \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = [\ \tfrac{3EI}{L}\ ] \qquad D_2 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \qquad D_3 = [\ \tfrac{4EI}{L}\ ]$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix}$$

$$K = [B_1^t B_2^t B_3^t] \cdot \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{3} B_j^t \cdot D_j \cdot B_j$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$u = K^{-1} \cdot f = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 3.926 \\ -0.9816 \end{bmatrix} kN \cdot m^2$$

$$s = D \cdot B \cdot u = [\ 2.356 \quad 2.748 \quad 0.7853 \quad -0.7853\ ]^t$$

a b c d

b (izq.)	b (der.)	c (izq.)	c (der.)	d
-15.31[f]	10.21[f]	-10.21[f]	10.21[f]	-10.21[f]
2.356[u]	2.748[u]	0.785[u]	-0.785[u]	-0.392[u]
-12.96	12.96	-9.423	9.423	-10.60

DIAGRAMA DE FLECTORES

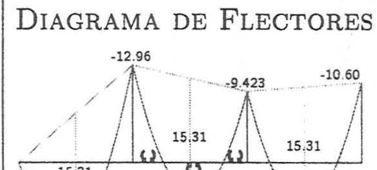
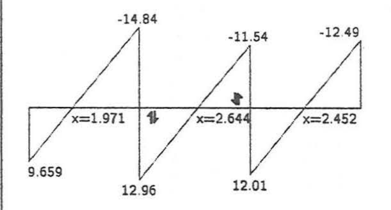


DIAGRAMA DE CORTANTES

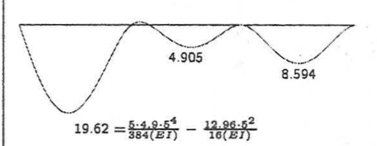


REACCIONES

a 9.659 — 14.84 b 12.96 — 11.54 c 12.01 — 12.49 d 12.49

R_a=-9.659 R_b=-27.80 R_c=-23.55 R_d=-24.98

DESPLAZAMIENTOS (X EI)



$$19.62 = \frac{5 \cdot 4.9 \cdot 5^4}{384(EI)} - \frac{12.96 \cdot 5^2}{16(EI)}$$

GIROS (X EI)

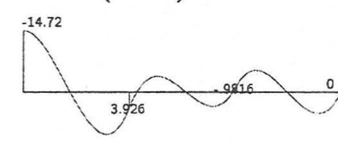


Figura 2.4: Vigueta continua.

– La RELACIÓN ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES propia de una barra con un extremo rígidamente empotrado ($\mathbf{D}_3 = [4EI/L]$. Apartado 2.2)

En el extremo 6 de la viga, rígidamente empotrado en el modelo, el momento m_6 es igual a $m_5/2$ (de acuerdo con la regla de la TRANSMISIÓN) debiendo recordarse que sólo se transmite el momento del estado [u], y no el término del estado [f].

Con las indicaciones previas, y siguiendo el proceso ya expuesto en apartados anteriores, se forma un SISTEMA DE 2 ECUACIONES DONDE INTERVIENEN LAS DOS INCÓGNITAS θ_b y θ_c: Escritas las ecuaciones de equilibrio de momentos (FIGURA2.4), se introducen en ellas las RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES antedichas y en un segundo grupo de sustituciones las, en este caso obvias, ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD indicadas en la misma FIGURA.

La matriz de coeficientes de este sistema de ecuaciones se denomina MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA ($\mathbf{K}$):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3EI/L + 4EI/L & 2EI/L \\ 2EI/L & 4EI/L + 4EI/L \end{bmatrix}$$

que puede obtenerse realizando (en orden) el ya conocido producto de matrices $\mathbf{K} = \mathbf{B^t} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$.

En la matriz $\mathbf{B}$ es posible agrupar por "cajas" los términos que hacen referencia a las condiciones de compatibilidad de cada una de las tres barras (véase nuevamente la FIGURA 2.4). De igual forma se procede en la misma figura con la matriz constitutiva $\mathbf{D}$: Se escribe como una matriz cuadrada de tres filas y columnas cuyos términos de la diagonal principal son las matrices constitutivas de cada una de las tres barras ($\mathbf{D}$ se interpreta así como una matriz cuyos términos son matrices).

La trasposición de una matriz cuyos términos son matrices en nada difiere de la de una matriz clásica, salvo que deben trasponerse también cada una de sus submatrices. De igual forma la multiplicación de estas matrices sigue las reglas habituales siendo inmediato el siguiente resultado

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3.$$

donde

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{B}_j^t \cdot \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{B}_j$$

Es decir, la MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA puede obtenerse como suma de las matrices de rigidez de cada una de las barras. Es más, observando la forma de las matrices $\mathbf{B}_j$, constituidas exclusivamente por ceros y unos, es claro que los términos de la matriz de rigidez de cada una de las barras sólo pueden ser nulos o los mismos de la matriz constitutiva $\mathbf{D}_j$ de la propia barra (lo que dejará de ser cierto al generalizar el método en el apartado 2.7).

Viendo "a dónde van a parar los coeficientes de rigidez de las barras" dentro de su propia matriz de rigidez, se deduce que la formación de la matriz de rigidez de la estructura obedece a una sencilla regla de "ENSAMBLAJE": Las componentes de las matrices de rigidez $\mathbf{K}_j$ de cada barra, SE FORMAN TOMANDO LOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DE LAS CORRESPONDIENTES MATRICES CONSTITUTIVAS $\mathbf{D}_j$, Y UBICÁNDOLOS EN LAS CASILLAS CORRESPONDIENTES A LOS NUDOS A LOS QUE SE UNE LA BARRA. La MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA se forma "ENSAMBLANDO" y sumando los coeficientes anteriores directamente sobre una sola matriz, sin necesidad de formar y sumar cada una de las $\mathbf{K}_j$.

La regla de "ENSAMBLAJE", con las adaptaciones que cada tipología estructural requiere, es exportable a los distintos problemas que se resuelven por el MÉTODO DE EQUILIBRIO. Lo que en principio podía considerarse un divertimento matemático es, de hecho, la base de las más eficientes implementaciones informática del MÉTODO.

Incidentalmente, conviene comenzar a familiarizar al lector con una formulación particular del principio de los trabajos virtuales, en la que como variables "reales" se toman las variables estáticas equilibradas, al revés de lo que se hace en el teorema de la carga unidad (recordado en epígrafes anteriores), donde el estado equilibrado es el "virtual". De momento se plantea esta formulación como un ejercicio meramente algebraico, pero en un apartado posterior se verán sus hondas implicaciones en la formulación de los métodos de equilibrio, y en particular en la relación general $\mathbf{H}{=}\mathbf{B}^t$. Multiplicando cada una de las ecuaciones de equilibrio por dos parámetros independientes y sumándolas se encuentra:

$$(m_a - m_2 - m_3) \cdot \theta_a + (m_b - m_4 - m_5) \cdot \theta_b = 0$$

Interpretando cada uno de los parámetros θ_a y θ_b como un giro arbitrario (virtual) de cada nudo, correspondiente a una deformada (virtual) que cumple las condiciones de compatibilidad ($\varphi_2 = \theta_a$, etc), la expresión anterior se reordena como sigue

$$m_a \cdot \theta_a - (m_2 \cdot \varphi_2 + m_3 \cdot \varphi_3) + m_b \cdot \theta_b - (m_4 \cdot \varphi_4 + m_5 \cdot \varphi_5) = 0$$

y en definitiva

$$m_a \cdot \theta_a + m_b \cdot \theta_b = (m_2 \cdot \varphi_2 + m_3 \cdot \varphi_3) + (m_4 \cdot \varphi_4 + m_5 \cdot \varphi_5),$$
$$W_{ext} = \mathbf{u^t} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{e^t} \cdot \mathrm{s} = W_{int}$$

En esta expresión las variables cinemáticas (**u**, **e**) son "virtuales" y compatibles, y en principio "sin relación causa efecto" con las variables estáticas equilibradas (**f**, s), que en este caso corresponden al estado "real" de la estructura.

Un segundo ejemplo se incluye en la FIGURA 2.5 que corresponde a una viga metálica continua constituida por un perfil IPE 360.

El análisis es muy similar al del ejemplo anterior, ya que también se modeliza con DOS GRADOS DE LIBERTAD efectivos, θ_b y θ_c (NGL = 2).

La principal novedad en el proceso de análisis radica en el tratamiento del VOLADIZO.

Si un voladizo se une a un nudo donde concurren otras dos o más barras, necesariamente debe introducirse en el análisis, como en el ejemplo del apartado 2.3. Esta alternativa es también válida cuando el voladizo se une a un solo vano, como en este caso, para lo cual sería necesario:

- Considerar el giro θ_a como una incógnita cinemática más, con lo cual el NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD aumentaría a 3
- Adoptar para la barra 1 en el estado de nudos fijos los valores de barra biempotrada $m_{1f} = qL^2/12 = - m_{2f}$
- Manejar las DOS RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES correspondientes a los dos momentos y dos giros en los extremos de la barra (matriz constitutiva 2x2 estándar "4-2-2-4") para la barra 1, en lugar de una sola relación entre el momento en el extremo derecho y su giro con el único coeficiente D_{eq} = 3EI/L
- Plantear el equilibrio de momentos del nudo a, como una ecuación más.

Esta manera de proceder resulta más sistemática cuando se opera con herramientas de cálculo automático, pero en un cálculo puramente manual, la diferencia entre tener que plantear y resolver un sistema de dos o de tres ecuaciones es bastante sensible. El desarrollo del problema incluido en la figura muestra cómo puede eliminarse en este caso (vigas continuas) el grado de libertad θ_a, sin mas que:

- Obtener el momento m_{2f}=-$qL^2/8$ de un vano apoyado-empotrado y sumarle (algebraicamente) m_{vf} (transmisión del momento aplicado al nudo "a" por el voladizo). En este caso m_{vf}=$qL_v^2/2$.
- Ignorar el voladizo en el estado [u], ya que en dicho estado el voladizo se considera descargado y no aporta ninguna rigidez al nudo al que se une; por lo tanto para el primer nudo puede tomarse la rigidez "equivalente" 3EI/L en lugar de la matriz constitutiva estándar "4-2-2-4".

Por otra parte, el planteamiento seguido deja claro que el momento en el primer apoyo está isostáticamente determinado y por lo tanto carece de términos hiperestáticos redistribuibles, lo que tiene importancia de cara a la aplicación de métodos plásticos.

En la misma FIGURA 2.5 se ha procedido a la comprobación de la flecha característica pésima, (que resulta ser válida si se adopta un límite de L/500 para la flecha total).

Los valores "elásticos" de las flechas son prácticamente exactos para las piezas metálicas como la de ese ejemplo, siempre que no se produzcan plastificaciones en servicio, es decir, que la tensión de comparación característica de servicio (sin mayorar) no supere en ningún punto el límite elástico característico (sin minorar).

Lo anterior se cumple en este caso: σ_{co} = 193.4 N/mm^2 (sin mayorar) < f_{yk} = 275 N/mm^2 (sin minorar). Esto no garantiza la resistencia en estado último, ya que no se han introducido los coeficientes de ponderación γ_f y γ_M (párrafo siguiente).

VIGA CONTINUA

45 kN/m; 45 kN; a, b, c, d; 2.500 m, 7.000 m, 6.000 m, 5.000 m

IPE 360: EI=cte=2,1E8kN/m²·16270E-8m⁴=34167kNm²

Nudos		Barras	
θ_b	m_b	φ_1	m_1
θ_c	m_c	...	...
		φ_4	m_4

$$u=\begin{bmatrix}\theta_b\\ \theta_c\end{bmatrix}\quad f=\begin{bmatrix}m_b\\ m_c\end{bmatrix}\quad e=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \dots\\ \varphi_4\end{bmatrix}\quad s=\begin{bmatrix}m_1\\ \dots\\ m_4\end{bmatrix}$$

ESTADO [f]

$$-\frac{qL_1^2}{8}+\frac{1}{2}\frac{qL_v^2}{2}\qquad \frac{qL_2^2}{12}\qquad -\frac{qL_2^2}{12}\qquad \frac{qL_3^2}{8}+\frac{3PL_3}{16}$$

ESTADO [u]

m_1, m_2, m_3, m_4

Estado [f] — Estado [u] — Estado [f] — Estado [u]

$$\frac{qL_1^2}{8}-\frac{1}{2}\frac{qL_v^2}{2}\ (205{,}3)\quad -\frac{qL_2^2}{12}\ (-135)\qquad -m_1\quad -m_2\qquad \frac{qL_2^2}{12}\ (135)\quad -\frac{qL_3^2}{8}-\frac{3PL_3}{16}\ (-182{,}8)\qquad -m_3\quad -m_4$$

$$H=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$m_b=m_1+m_2$ — m_b=70,31 kN·m

$m_c=m_3+m_4$ — m_c=-47.81 kN·m

$$f=H\cdot s$$

COM

$$\varphi_1=\theta_b,\quad \varphi_2=\theta_b,\quad \varphi_3=\theta_c,\quad \varphi_4=\theta_c\qquad B=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\qquad e=B\cdot u$$

ECO

$$H=B^t\qquad \begin{aligned}m_1&=\tfrac{3\cdot EI}{L_1}\varphi_1\\ m_2&=\tfrac{4\cdot EI}{L_2}\varphi_2+\tfrac{2\cdot EI}{L_2}\varphi_3\\ m_3&=\tfrac{2\cdot EI}{L_2}\varphi_2+\tfrac{4\cdot EI}{L_2}\varphi_3\\ m_4&=\tfrac{3\cdot EI}{L_3}\varphi_4\end{aligned}$$

$$D=\begin{bmatrix}\frac{3\cdot EI}{L_1}&0&0&0\\0&\frac{4\cdot EI}{L_2}&\frac{2\cdot EI}{L_2}&0\\0&\frac{2\cdot EI}{L_2}&\frac{4\cdot EI}{L_2}&0\\0&0&0&\frac{3\cdot EI}{L_3}\end{bmatrix}\qquad s=D\cdot e$$

$$K=B^t\cdot D\cdot B=\begin{bmatrix}\frac{3EI}{L_1}+\frac{4EI}{L_2}&\frac{2EI}{L_2}\\ \frac{2EI}{L_2}&\frac{4EI}{L_2}+\frac{3EI}{L_3}\end{bmatrix}$$

$$B_1=[1\ \ 0]\qquad B_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad B_3=[0\ \ 1]\qquad B=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{bmatrix}$$

$$D_1=\left[\tfrac{3EI}{L_1}\right]\qquad D_2=\begin{bmatrix}\frac{4EI}{L_2}&\frac{2EI}{L_2}\\ \frac{2EI}{L_2}&\frac{4EI}{L_2}\end{bmatrix}\qquad D_3=\left[\tfrac{3EI}{L_3}\right]\qquad D=\begin{bmatrix}D_1&0&0\\0&D_2&0\\0&0&D_3\end{bmatrix}$$

$$K=[B_1^tB_2^tB_3^t]\cdot\begin{bmatrix}D_1&0&0\\0&D_2&0\\0&0&D_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^3 B_j^t\cdot D_j\cdot B_j$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{3EI}{L_1}&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{4EI}{L_2}&\frac{2EI}{L_2}\\ \frac{2EI}{L_2}&\frac{4EI}{L_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&\frac{3EI}{L_3}\end{bmatrix}$$

$$u=K^{-1}\cdot f=\begin{bmatrix}0{,}002408\\-0{,}001738\end{bmatrix}$$

$$s=D\cdot B\cdot u=[35{,}26\quad 35{,}05\quad -12{,}17\quad -35{,}64]^t$$

a: 140.6, -140.6; b: -205,3[f] 35,26[u] -170,1 | 135[f] 35,05[u] 170,1; c: -135[f] -12,17[u] -147,2 | 182,8[f] -35,64[u] 147,2; d

DIAGRAMA DE FLECTORES

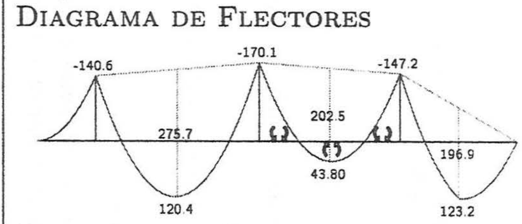
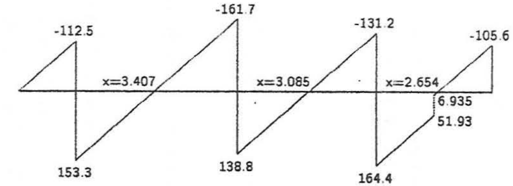


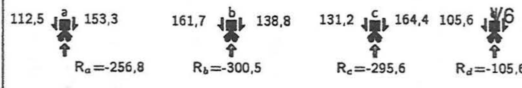
DIAGRAMA DE CORTANTES



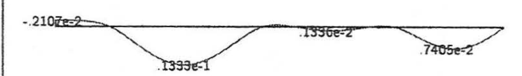
REACCIONES

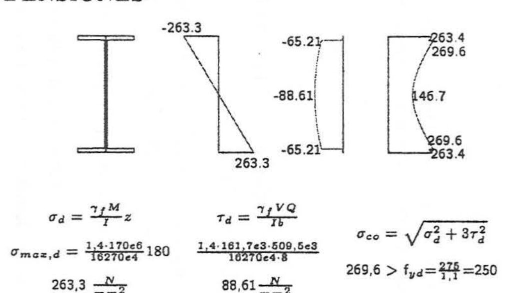


DESPLAZAMIENTOS



TENSIONES





$$\sigma_d=\frac{\gamma_f M}{I}z\qquad \tau_d=\frac{\gamma_f VQ}{Ib}\qquad \sigma_{co}=\sqrt{\sigma_d^2+3\tau_d^2}$$

$$\sigma_{max,d}=\frac{1{,}4\cdot170e6}{16270e4}180\qquad \frac{1{,}4\cdot161{,}7e3\cdot509{,}5e3}{16270e4\cdot8}\qquad 269{,}6>f_{yd}=\tfrac{275}{1{,}1}=250$$

$$263{,}3\ \frac{N}{mm^2}\qquad 88{,}61\ \frac{N}{mm^2}$$

Figura 2.5: Viga continua.

Se ha procedido en la figura a la comprobación resistente "elástica", de manera coherente con el proceso seguido en este apartado, que se integra en un capítulo dedicado a los métodos de análisis lineal. Con los datos indicados en la figura, la sección más desfavorable NO SERÍA VÁLIDA, puesto que la tensión de comparación máxima ponderada $\sigma_{co,d} = \gamma_f \cdot \sigma_{co} = 270.8$ N/mm^2 excede el límite elástico minorado del acero supuesto, $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_M = 275/1.1 = 250$ N/mm^2 . En rigor, sería preciso reforzar dicha sección, o cambiar de perfil.

Sin embargo, se puede verificar que tiendo en cuenta el comportamiento posterior en fase anelástica, es posible dar por válido el perfil IPE 360 adoptado (lo que se deja como ejercicio del cálculo plástico que, aunque no se incluye en estos apuntes, es objeto de la última parte del curso).

Con la técnica de análisis lineal o "elástico" desarrollada en el presente apartado pueden resolverse muy fácilmente diversas VIGAS CONTINUAS DE VANOS IGUALES Y SECCIÓN CONSTANTE, cuyos flectores sobre los apoyos intermedios se recogen en las TABLAS siguientes. Se recomienda su cálculo por el alumno, como ejercicio de auto-comprobación.

Obsérvese en dichas TABLAS que los valores absolutos de estos flectores sobre los apoyos intermedios oscilan entre órdenes del 50 % al 100 % de los correspondientes momentos isostáticos (que son respectivamente $qL^2/8$ y $PL/4$ para cada tabla), lo cual puede ser un orden de magnitud útil para detectar posibles errores de bulto en los cálculos de este tipo de piezas.

Para carga uniformemente repartida constante (q) igual en todos los vanos:				
	Apoyo 2º	Apoyo 3º	Apoyo 4º	Apoyo 5º
2 vanos	$-0.125 \cdot qL^2$	-	-	-
3 vanos	$-0.100 \cdot qL^2$	$-0.100 \cdot qL^2$	-	-
4 vanos	$-0.107 \cdot qL^2$	$-0.071 \cdot qL^2$	$-0.107 \cdot qL^2$	-
5 vanos	$-0.105 \cdot qL^2$	$-0.079 \cdot qL^2$	$-0.079 \cdot qL^2$	$-0.105 \cdot qL^2$

Para carga puntual centrada (P) igual en todos los vanos:				
	Apoyo 2 º	Apoyo 3 º	Apoyo 4 º	Apoyo 5 º
2 vanos	-0.188·PL	-	-	-
3 vanos	-0.150·PL	-0.150·PL	-	-
4 vanos	-0.161·PL	-0.107·PL	-0.161·PL	-
5 vanos	-0.158·PL	-0.118·PL	-0.118·PL	-0.158·PL

Un criterio sencillo de optimización aproximada de las vigas continuas, de vanos sometidos a carga uniformemente repartida constante (q) igual en todos los vanos, es el de COMPENSACIÓN DE LUCES según los valores siguientes:

$$qL'^2/8 = qL^2/12 \ \ldots \ L' \approx 0.82 \cdot L,$$

siendo L la luz de los vanos interiores, y L' la de los vanos extremos, con lo cual éstos trabajan como empotrados-apoyados, y los vanos interiores como bi-empotrados (efectivamente, entonces las acciones nodales son $m_i = 0$, y por lo tanto son nulos los giros de todos los apoyos intermedios).

En realidad con estos valores de L' y L, la relación flecha/luz queda ligeramente descompensada, por lo que en el caso en que el límite de flecha sea determinante, es preferible la relación: L' ≈ 0.80·L, que sin embargo puede elevarse algo por encima de los valores anteriores cuando el estado límite último sea el determinante en el dimensionado: L' ≈ 0.85·L

Lógicamente las posibles alternancias de sobrecargas, o la existencia de cargas puntuales importantes, etc., pueden desvirtuar la bondad de estos criterios de compensación de luces, sencillos pero raramente aplicados en la edificación.

Las sencillas reglas antedichas pueden ser útiles para saber "dónde colocar los soportes" de un edificio convencional, si el objetivo de conseguir una estructura económica no entra en colisión con otras prioridades. Esas simplísimas relaciones geométricas, junto con un orden de magnitud apropiado para las relaciones canto/luz (h/L) de los forjados y vigas, siempre para casos hiperestáticos (recomendándose no bajar en lo posible de valores de h entre L/18 y L/20) deberían ser, por su facilidad e importancia, siempre recordadas en el planteamiento inicial de las vigas continuas y estructuras intraslacionales en general, en el proyecto de edificios convencionales.

2.5 PÓRTICOS INTRASLACIONALES

Se generaliza aquí de manera natural, para estructuras intraslacionales de n Grados de Libertad, los conceptos de MATRIZ DE EQUILIBRIO (**H**), MATRIZ DE COMPATIBILIDAD (**B**), MATRIZ CONSTITUTIVA (**D**), y MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA (**K**) de los apartados anteriores.

Siguiendo las pautas indicadas se comienza dibujando el estado [u]. Quedará caracterizado por los n giros θ_1, θ_2, ..., θ_n, que se adoptarán como incógnitas.

Sobre la base de la ya conocida correspondencia entre las incógnitas cinemáticas y las ecuaciones de equilibrio se escriben las n ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE MOMENTOS DE LOS NUDOS a, b, ..., n. La única diferencia respecto de las ecuaciones de las secciones anteriores es que en algunas, las correspondientes a los nudos en los que acometen más de dos barras, interviene más de dos momentos de extremo de barra.

La matriz del sistema anterior es la MATRIZ DE EQUILIBRIO (**H**), que está formada por n filas (una por cada ecuación de equilibrio) y m columnas; siendo m el número de los momentos de extremo de barra que intervienen en las n ecuaciones de equilibrio. Nótese que, como hasta aquí, los elementos de la matriz **H** sólo serán 0 o 1.

A continuación se escribirán los giros φ de cada barra en función de los giros de los nudos θ. En total m ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD: una por cada uno de los giros φ, duales de los momento de extremo de barra que forman parte de las anteriores ECUACIONES DE EQUILIBRIO de momentos.

La matriz del sistema anterior es la MATRIZ DE COMPATIBILIDAD (**B**), que estará formada por m filas (una por cada ecuación de compatibilidad) y n columnas (una por el giro θ de cada nudo). Nótese que los elementos de la matriz **B** son exclusivamente 0 y 1, y como en cada una de sus filas sólo aparece un 1.

La relación entre ambas matrices es $\mathbf{H}=\mathbf{B}^t$, por lo que no será necesario más que escribir uno de los dos sistemas de ecuaciones, obtener la matriz de dicho sistema (la de equilibrio o la de compatibilidad) y determinar la dual por simple trasposición de la hallada.

Las RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN de cada barra son las ya obtenidas, escribiéndose una por cada momento de extremo de barra. La matriz de este último sistema de ecuaciones es la matriz **D**, constituida por m filas (una por ecuación) y m columnas (una por cada giro de barra φ). Debe notarse que la matriz **D** es necesariamente simétrica (por serlo la de cada una de las barras; véase la sección 2.2).

Por sustitución directa de las RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN en las ECUACIONES DE EQUILIBRIO y a continuación de las ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD se encuentra un sistema de n ecuaciones (las de equilibrio debidamente transformadas) y n incógnitas (los n giros θ de los nudos). Nuevamente se llaman la atención sobre el hecho de que las ecuaciones son de equilibrio mientras las incógnitas finales son variables cinemáticas (giros en este caso).

Simbólicamente las sustituciones anteriores se reducen a realizar las mismas operaciones matriciales que ya se indicaron en la sección 2.3.

La matriz de coeficientes de este sistema de ecuaciones se denomina MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA (**K**). Se obtiene realizando (en orden) el producto matricial $\mathbf{K}=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}$.

La fila i-esima de esta matriz corresponde a la ecuación de equilibrio número i ($1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$)

Dentro de esa fila genérica, cada coeficiente K_{ik} es el coeficiente de la incógnita θ_k en la ecuación número i ($1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$; $1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}$)

Dicho en otros términos, el sistema de ecuaciones es:

$$\sum_{1}^{n} \mathbf{K}_{ik}\theta_k = f_i, \; (1 \leq i \leq n)$$

Si como en la sección anterior los términos de cada una de las matrices **H**, **B** y **D** se agrupan en submatrices $\mathbf{H}_j$, $\mathbf{B}_j$ y $\mathbf{D}_j$ que se identifican como las de equilibrio, compatibilidad y constitutiva de

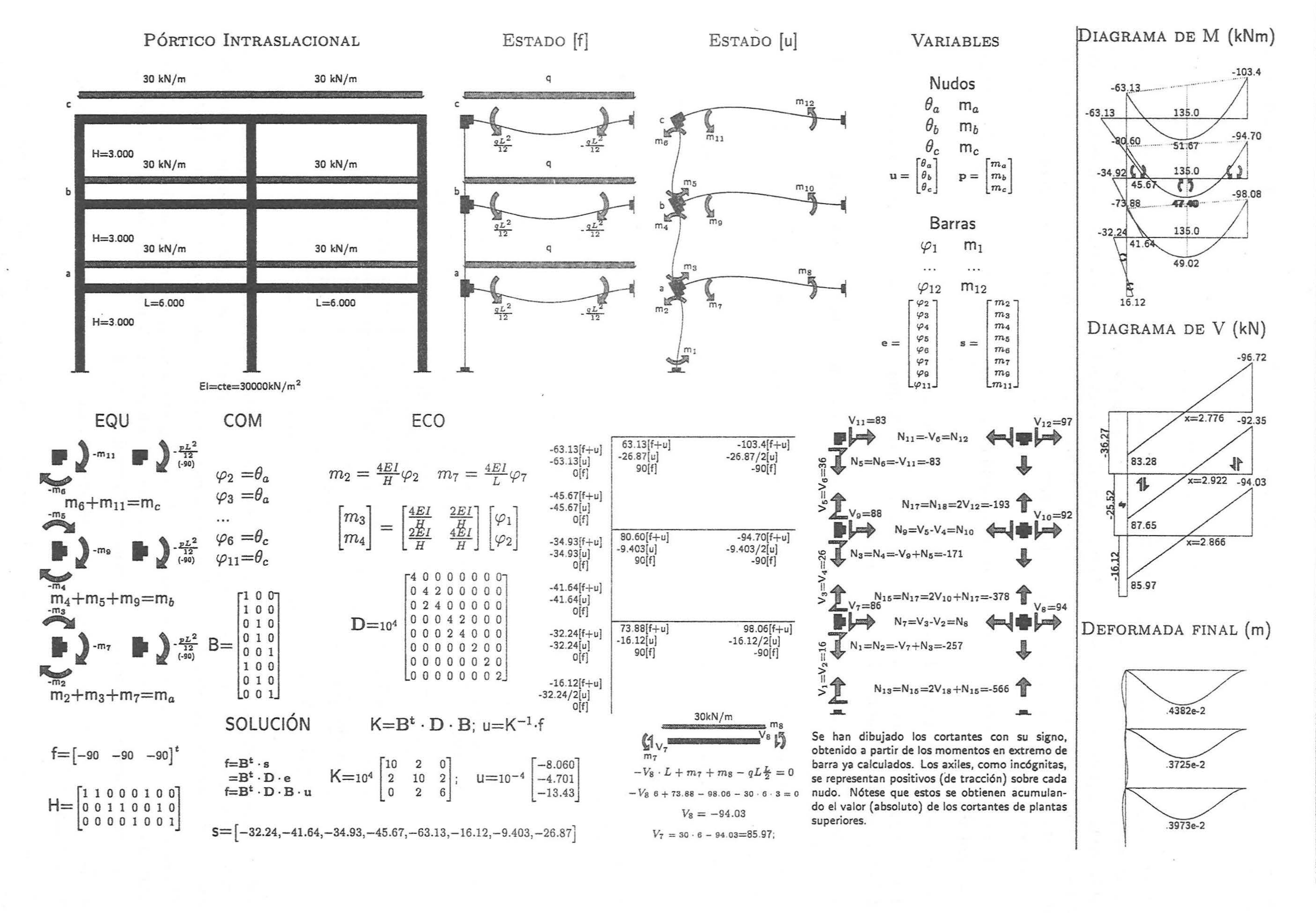


Figura 2.6: Pórtico simétrico intraslacional.

cada una de las barras, la MATRIZ DE EQUILIBRIO DE LA ESTRUCTURA se interpreta como la suma de m matrices $\mathbf{K}_j=\mathbf{B}_j^t \cdot \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{B}_j$, de rigidez de barra. Una por cada barra ($1 \leq j \leq m$) de la estructura:

$$\mathbf{K} = \sum_1^m \mathbf{K}_j \quad (\text{"ENSAMBLAJE"})$$

Realizando cada uno de los productos $\mathbf{B}_j^t \cdot \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{B}_j$ se observa que las "aportaciones" $\mathbf{K}_j$ de cada barra j a la MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA, se escriben simplemente tomando los COEFICIENTES DE RIGIDEZ de las correspondientes matrices $\mathbf{D}$ o $\mathbf{D}_{eq}$ (según corresponda a cada barra), y ubicándolos en las casillas que correspondan a las FILAS Y COLUMNAS CON IGUALES ÍNDICES QUE LOS NUDOS A LOS QUE SE UNE O "CONECTA" LA BARRA (recuérdese que los elementos de las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ sólo exclusivamente unos y ceros).

Puede, por tanto, obtenerse la matriz $\mathbf{K}$ sin necesidad de realizar explícitamente los productos matriciales antedichos:

El proceso de formación de $\mathbf{K}$ se inicia poniendo a cero todos sus coeficientes.

En la TABLA ADJUNTA se indica donde se suman los coeficientes de rigidez de la matriz estándar $\mathbf{D}$ (4-2-2-4) de una barra unida a los nudos r y s

Los coeficientes de cada barra se suman a los de otras barras que coincidan en la misma "casilla" de la matriz, en su caso.

Se indica también dónde se suma la rigidez de las barras descritas mediante un único coeficiente de rigidez equivalente D_{eq} (apartado 2.2):

- Una barra unida a un nudo i y rígidamente empotrada en su extremo opuesto, aporta su rigidez equivalente D_{eq} = 4EI/L a la posición K_{ii} de la diagonal principal de la matriz (donde se suma con otros posibles coeficientes de rigidez de otras barras conectadas al mismo nudo i).
- Una barra unida a un nudo i y articulada en su extremo opuesto, aporta su rigidez equivalente D_{eq} = 3EI/L a la posición K_{ii} , análogamente a la anterior
- Análogamente para los casos D_{eq} = 2EI/L y D_{eq} = 6EI/L que se estudian en el apartado 2.2

Incógnitas	θ_1	...	θ_r	...	θ_s	...	θ_i	...	θ_n
Ecuación 1 (m_a)									
Ecuación r (m_r)			+4EI/L		+2EI/L				
Ecuación s (m_s)			+2EI/L		+4EI/L				
Ecuación i (m_i)							D_{eq}		
Ecuación n (m_n)									

Las ACCIONES NODALES equivalentes se obtienen en cada nudo mediante la suma algebraica de los momentos de empotramiento de los extremos de las barras unidos al nudo, cambiada de signo, y los momentos directamente aplicados sobre el mismo (conservando su signo) según la regla ya demostrada.

El procedimiento de análisis de pórticos intraslacionales se ilustra con el ejemplo de la FIGURA 2.6, que corresponde a un pórtico que merced a su simetría y a la hipótesis de inextensibilidad, es modelizable como una estructura intraslacional de 3 grados de libertad: θ_a, θ_b, θ_c.

En la FIGURA se han indicado los DIAGRAMAS FINALES DE ESFUERZOS DE LAS BARRAS, obtenidos según las reglas dadas al final del apartado 2.3.

Se llama la atención sobre el hecho de que los esfuerzos axiles N del soporte central son (salvo signos) el resultado de acumular o "ARRASTRAR" los cortantes que todas las vigas de ambas mitades de la estructura entregan al mismo. Así, en el arranque en cimentación, dicho esfuerzo vale:

$$N = -2 \cdot (96.7 + 92.4 + 94.0) \approx -566kN$$

En este cálculo es lógicamente IMPORTANTÍSIMO NO OLVIDAR LAS REACCIONES DE POSIBLES VIGAS O ZUNCHOS TRANSVERSALES al pórtico, que no se han considerado en el ejemplo.

Este valor es en este caso aproximadamente igual a la suma de los cortantes isostáticos de las seis vigas que cargan sobre dicho soporte, multiplicada por un coeficiente 1.05:

$$1.05 \cdot 6 \cdot 30 \cdot 6.000/2 = 567kN$$

Típicamente, no obstante, la corrección de N por hiperestatismo es del orden de 1.10 a 1.15 (en ocasiones puede llegar a ser bastante superior).

En cuanto a los flectores de los extremos de las vigas, obsérvese que en este ejemplo sus valores absolutos oscilan entre órdenes del 55% al 75% del momento isostático $qL^2/8$, porcentajes que pueden considerarse típicos para pórticos intraslacionales de edificación (salvo redistribuciones anelásticas moderadas, que se tratarán en otras lecciones). Posibles relaciones anómalas de rigideces de las piezas, que pueden ser frecuentes en las plantas de cubierta, y en otros casos, pueden lógicamente alterar esos órdenes de magnitud. El caso de pórticos traslacionales y sometidos a acciones horizontales no está todavía contemplado en el presente apartado. Su estudio se aborda en epígrafes posteriores.

A pesar de las salvedades expresadas, este tipo de consideraciones anteriores pueden ser muy útiles para:

1. Cálculos rápidos de carácter aproximado, predimensionado inicial, etc.
2. Control de errores de bulto en cálculos manuales o informatizados. HAY QUE SABER CUANDO "NO CREER LO QUE DIGA LA MÁQUINA", porque la probabilidad de que un proyectista asiduo de estructuras deba enfrentarse en un instante dado de su vida profesional a un error importante en algún cálculo mecanizado (por errores de modelización, programación, interpretación, etc.), puede decirse que es "casi" de un 100%

LA HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO ELÁSTICO-LINEAL DISTA MUCHO DE SER VÁLIDA EN LOS PÓRTICOS DE HORMIGÓN ARMADO, como el del ejemplo. Los resultados más dramáticamente afectados son los movimientos, y en particular ES IMPORTANTÍSIMO CORREGIR EL VALOR DE LAS FLECHAS ELÁSTICAS, YA QUE TÍPICAMENTE LAS FLECHAS REALES SON DEL ORDEN DE DOS A CUATRO VECES MAYORES (tómese buena nota de ello, ya que la gran mayoría de patologías en las estructuras de hormigón armado en nuestro país ocurren precisamente por deformación excesiva).

Los procedimientos de corrección de flechas por fisuración y deformaciones diferidas del hormigón, así como los límites de flecha normativos, se imparten en los cursos de dimensionado de piezas de hormigón armado. Un criterio sencillo pero eficaz suele consistir en aplicar a la flecha elástica factores correctores diversos, tales como la relación entre inercia elástica y "efectiva", etc.

En cambio las redistribuciones anelásticas de los diagramas elásticos de esfuerzos son generalmente de menor cuantía, por lo que directamente pueden tomarse como válidos para el cálculo de armaduras, o redistribuirse moderadamente.

Un segundo ejemplo, desarrollado en la figura 2.7, puede servir de auto-comprobación sobre el dominio adquirido de la técnica de análisis de pórticos intraslacionales por el método de equilibrio, que una vez comprendida resulta de aplicación muy sencilla.

La única novedad del proceso de análisis este segundo ejemplo radica en la existencia de una PIEZA INCLINADA (que es la que precisamente asegura la ausencia de desplazamientos horizontales de la planta). Sus momentos de empotramiento perfecto deben calcularse según lo indicado en la FIGURA 2.7. Al ser el diagrama final de N variable a lo largo de la pieza, su determinación exige considerar el equilibrio de fuerzas longitudinales de la misma.

Según puede observarse en la figura, el problema se ha resuelto de manera muy rápida y sencilla, aplicando el formalismo general. Igual de sencillo hubiera sido utilizar directamente la regla de ENSAMBLAJE, $\mathbf{K} = \sum_1^m \mathbf{K}_j = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4$, que permite formar la matriz de rigidez, de estructuras intraslacionales, de manera muy sistemática.

Para las estructuras intraslacionales, las matrices $\mathbf{B}_j$ están formadas por ceros y unos, con lo que cada matriz $\mathbf{K}_j$ adopta la sencilla forma ya indicada, en la que simplemente los coeficientes de la matriz de rigidez de la barra, $\mathbf{D}_j$, se colocan

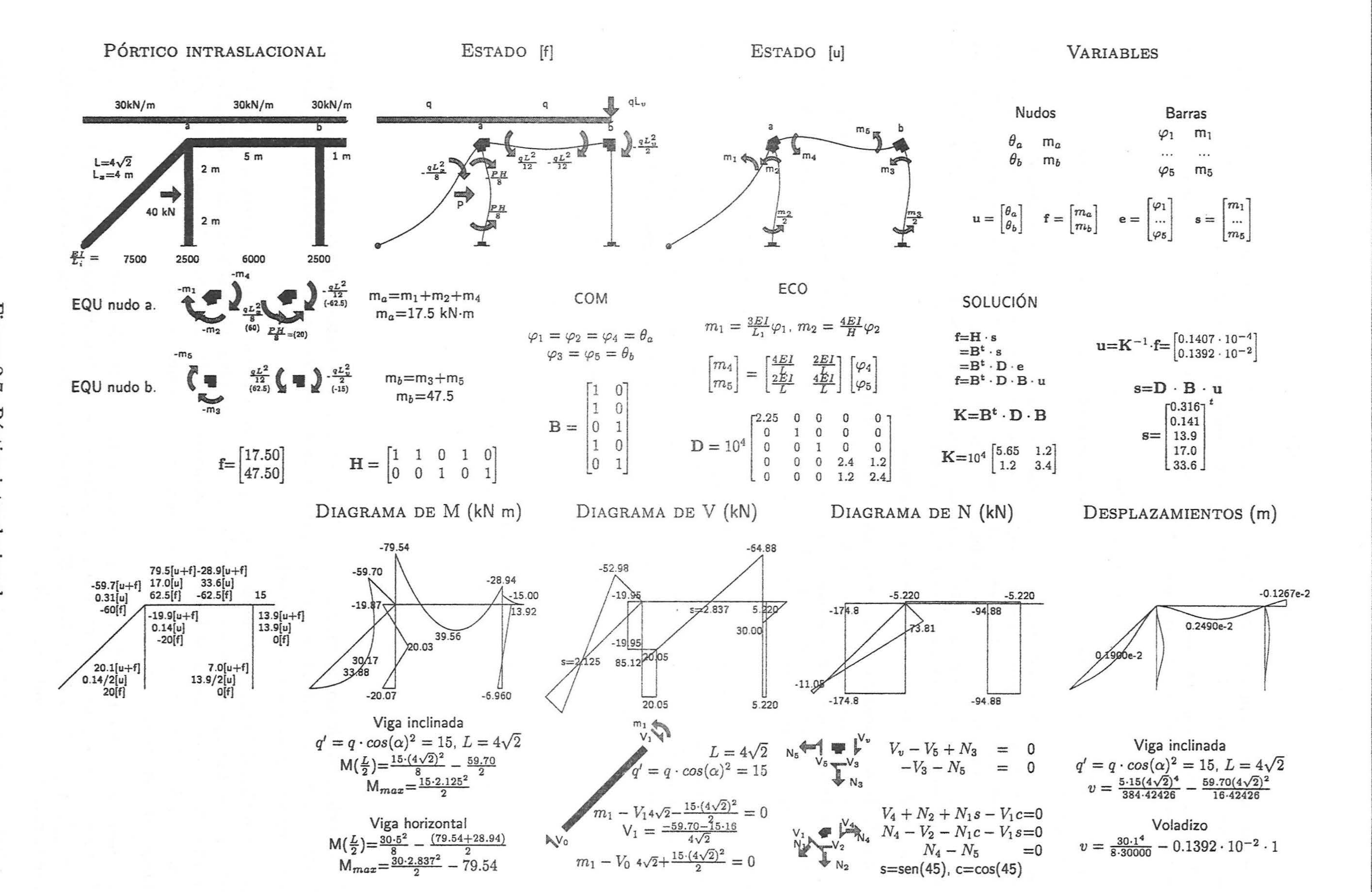


Figura 2.7: Pórtico intraslacional.

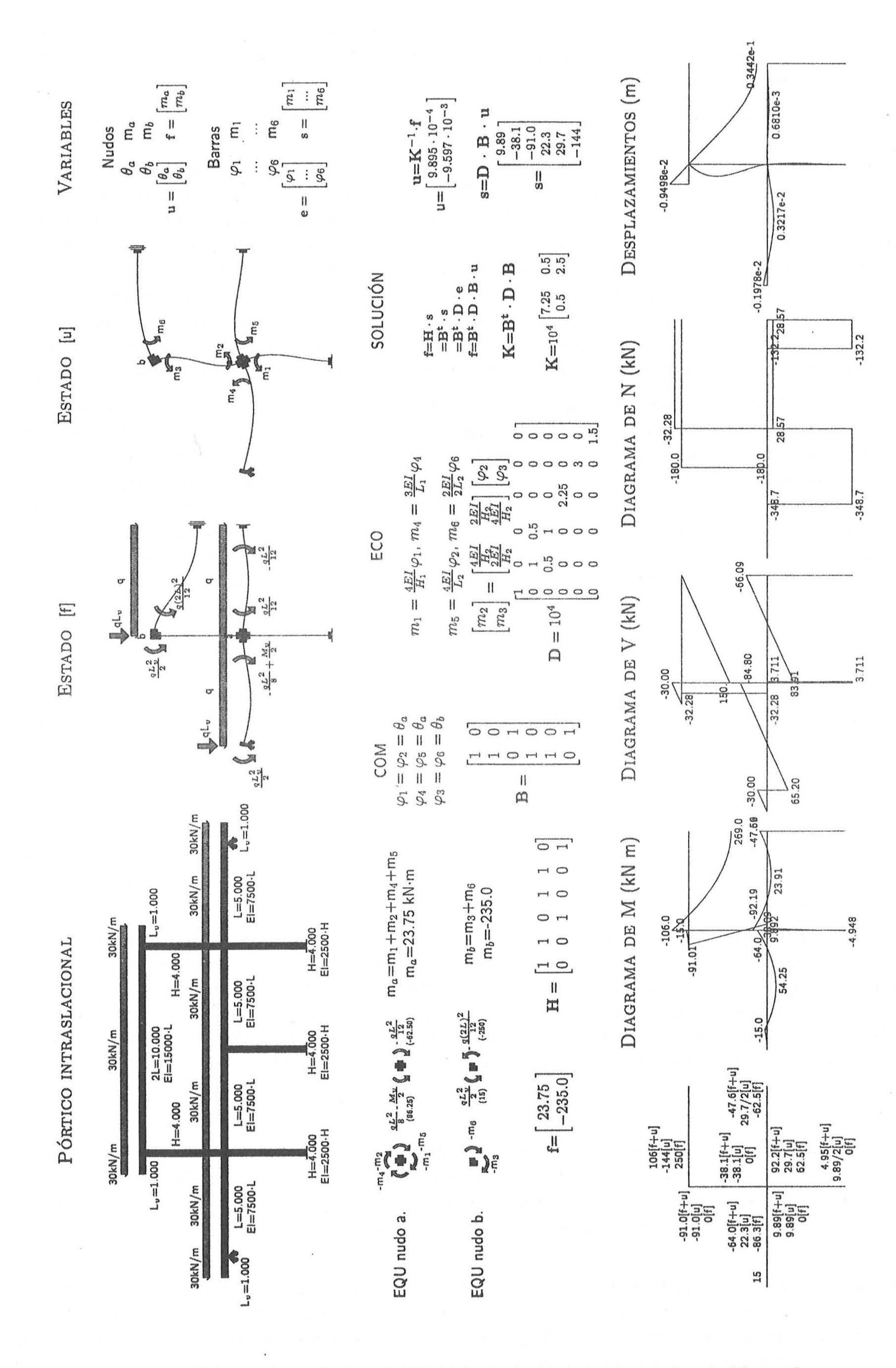


Figura 2.8: Pórtico intraslacional. Técnicas de reducción de grados de libertad.

en las posiciones que corresponden a los índices de los nudos a los que se "CONECTA" la barra. En pórticos desplazables la "regla de ensamblaje" sigue siendo válida, pero no directamente a partir de los términos de cada $\mathbf{D}_j$, según se verá en el apartado correspondiente.

Se concluye este apartado con el ejemplo de la FIGURA 2.8, que pretende ser un compendio del uso de las técnicas de reducción de grados de libertad ("condensación estática") y las MATRICES EQUIVALENTES deducidas en la sección 2.2. Para el análisis del pórtico de la figura se hace uso de la hipótesis de inextensibilidad (como en el resto de estructuras analizadas hasta aquí) y de las condiciones de simetría. Por razones análogas a las expuestas en el estudio del pórtico de la figura 2.3, se deduce que los desplazamientos de los nudos que constituyen el pórtico se anulan: para las acciones consignadas el pórtico puede considerarse intraslacional. De este modo, el uso de la RIGIDEZ EQUIVALENTE de una BARRA CON DEFORMADA SIMÉTRICA para el dintel de la planta superior, de la RIGIDEZ EQUIVALENTE de una BARRA CON UN EXTREMO ARTICULADO para las vigas exteriores de la primera planta y de la RIGIDEZ EQUIVALENTE de una BARRA CON UN EXTREMO RÍGIDAMENTE EMPOTRADO para los soportes inferiores y las vigas interiores de la primera planta, reduce el numero de grados de livertad efectivos a 2 (θ_a, θ_b).

Como se indicó en la sección 2.3, cualquier punto situado sobre el eje de simetría debe tener un giro nulo. Sin embargo, aun cumpliéndose esta condición es manifiesta, sobre la figura, la diferencia trascendental entre la viga de la planta superior y las de la inferior. En las últimas el eje de simetría coincide con un soporte que garantiza que su extremo no puede experimentar desplazamiento vertical (hipótesis de inextensibilidad de los soportes) además de no girar ni desplazarse horizontalmente (por simetría). Así se justifica, a efectos de cálculo, que el extremo situado sobre el eje de dichas vigas pueda considerarse RÍGIDAMENTE EMPOTRADO. Por contra, en la viga de la planta superior el eje de simetía no coincide con ningún sopote (o apoyo) por lo cual, aunque el giro de su punto medio sea nulo, el movimento vertical puede ser distinto de cero sin alterar la simetría del problema, debiendo usarse en este caso la rigidez equivalente de una VIGA CON DEFORMADA SIMÉTRICA y con su longitud integra (L=10m en el ejemplo) a todos los efectos.

Desconocer, o confundir, la matriz $\mathbf{D}_{eq}$ que debe utilizarse en cada caso, o lo que es más grave una incorrecta modelización de la estructura (suponiendo por ejemplo el punto central de la viga superior fijo, o el de la planta inferior con posibilidad de movimiento vertical), dará lugar a resultados radicalmente distintos a los "reales".

Pero mientras los errores del primer tipo (términos de rigideces incorrectos) proporcionan soluciones equilibradas, aunque no compatibles (salvo errores adicionales), que podrían llegar a validarse mediante la aplicación de los métodos del cálculo plástico, los del segundo tipo (alterar las coacciones "reales" de la estructura) son gravísimos errores de concepto, como consecuencia de los cuales las soluciones encontradas no preservan ni las condiciones de compatibilidad ni, lo que es extremadamente peligroso, las de equilibrio.

Otra fuente de errores en el uso de la técnica expuesta se produce a la hora de decidir la longitud de la viga con la cual calcular el valor de $\mathbf{D}_{eq}$ y de los momentos de empotramiento. Cuando el eje de simetría coincide con un soporte (o apoyo) debe tomarse como longitud la distancia entre éste y el siguiente apoyo; por contra, en casos como el de la viga superior del ejemplo, recordando la demostración expuesta en la sección 2.2 para obtener $\mathbf{D}_{eq}$ en BARRAS CON DEFORMADA SIMÉTRICA es claro que debe tomarse la LONGITUD TOTAL para calcular tanto la rigidez equivalente, como los momentos de empotramiento del estado [f].

Si se confunde la longitud de la viga al evaluar la rigidez equivalente se obtendrá una solución no compatible pero equilibrada, que como antes quizá podría validar otro tipo de análisis. Sin embargo, si el error se comete al calcular el valor de los momentos de empotramiento y/o el momento isostático de la viga, la solución no será equilibrada ni compatible. Como en las expresiones para calcular dichos momentos la luz de la viga aparece elevada al cuadrado, el error cometido si se toma como longitud de la viga la distancia del eje de simetría al apoyo en lugar de la total está en la dramática proporción 1 a 4.

Se llama también la atención sobre el modo en que se ha calculado el valor del momento de empotramiento en el estado [f] para las vigas con un voladizo de la planta inferior. El cálculo es trivial sustituyendo el voladizo por su efecto sobre el apoyo y haciendo uso del concepto de "TRANSMISIÓN" ya expuesto en apartados previos y recogido en el apéndice B.

CUADERNO

86.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es

